Bayes Approach to estimation the Fuzzy reliability for Frechet Distribution

By using simulation

طريقة بيز لتقدير المعولية الضبابية لتوزيع فريچت باستعمال المحاكاة

أ.م. د. مهدي وهاب نصر الله الباحث/ بشار خـــالد علي

جامعة كربلاء / كلية الادارة والاقتصاد

ملخص :

في هذا البحـــث سيتم تقدير معلمات توزيع فريچت $\boldsymbol{Frechet\ Distribution}$ وهما معلمة الشكل (α) $\boldsymbol{Shape\ parameter}$ ومعلمة القياس (β) $\boldsymbol{scale\ parameter}$ باستعمال منهجية بيز عندما تكون بيانات اوقات الحياة عبارة عن ارقام ضبابية ($\boldsymbol{Fuzzy\ Numbers}$) ومن ثم استعمال التقديرات التي تم الحصول عليها في ايجاد تقدير دالة المعولية الضبابية للتوزيع . وتوصل الباحثان عن طريق نتائج المحاكاة بان تقدير المعولية الضبابية يكون افضل من الحقيقية لكل احجام العينات، وان المعولية الضبابية عند تقديرات معلمات توزيع فريچت المقدرة بطريقة بيز تعطي اقل متوسط مربعات خطأ $\boldsymbol{MSE}$ واقل متوسط مربعات خطأ نسبي مطلق $\boldsymbol{MAPE}$ ، وانه بزيادة حجم العينة فان متوسط مربعات خطأ $\boldsymbol{MSE}$ ومتوسط مربعات الخطأ النسبي المطلق$\boldsymbol{MAPE}$ يتناقص الى ان يصل اقل قيمة عند حجم العينة $\boldsymbol{n = 500}$

Abstract

In this research we will estimate the distribution parameters by using the method of Bayes when the data of life times are fuzzy numbers. And then use the estimates obtained in the estimation of the fuzzy reliability function of the distribution and then choose the best estimate of this function by comparing in mean square error (MSE) and Mean Absolut Proportional Error (MAPE). The researcher concluded by means of the simulation results that the estimation of the fuzzy is better than the real for all sample sizes when we estimate of the Frechet distribution parameters by using Bayes method. The mean error squares (MSE) and the Mean Absolut Proportional Error (MAPE) are contrasted to the lowest of the sample size n = 500.

الكلمات المفتاحية : بيانات حياة ضبابية . توزيع فريچت. تقدير المعولية . تقدير بيز

المقدمة : (Introduction)

فـــي كثيـــر مـــن الاحيـــان ، تواجهنـــا فـــي العـــالم المـــادي الحقيقـــي مجموعـــات مـــن الاشـــياء لـــيس لهـــا معيـــار انتمـــاء دقيـــق لعناصـــرها ، لـــذلك فـــان تلـــك المجموعـــات لاتشـــكل مجموعـــات بـــالمعنى الرياضـــي المعتـــاد لهـــذه المصـــطلحات مـــثلاً مجموعـــة (فئـــة) الحيوانـــات، مـــن الواضـــح أن الكـــلاب او الاحصـــنة او الطيـــور .... الـــخ ، تنتمـــي لتلـــك الفئـــة (المجموعـــة) وواضـــح ايضـــا اســـتبعاد اشـــياء مثـــل النباتـــات ، الســـوائل ، الصـــخور ... الـــخ ، فـــي حـــين ان هنالـــك اشـــياء مثـــل نجـــم البحـــر ، البكتريـــا ... الـــخ فيهـــا شـــك

فيما يتعلق بانتماءها لفئة الحيوانات ، وايضا مجموعة الرجال طوال القامة ، و مجموعة الارقام الحقيقية الاكبر من ١ ، ان مثل تلك المجموعات التي يكون هنالك شك في انتماء عناصرها للمجموعة تدرج تحت ما يسمى بالمجموعة الضبابية ***Fuzzy Set*** والتي تمثل انطلاقة جديدة للخروج من النمط التقليدي والذي سيجهز الطريق للتعامل مع المشاكل التي لها مصدر من عدم الدقة او عدم توفر معيار محدد وثابت بخلاف المتغير العشوائي الاعتيادي.

تعد المعولية (***Reliability***) من التقنيات المهمة والفعالة في الوقت الحاضر لتقييم عمل الانظمة او الوحدات . وهي الدالة التي تعطي احتمال عمل اي وحدة او مركبة لمدة معينة من الوقت دون فشل. ان الكثير من الطرائق والنماذج في نظرية المعولية بصورتها التقليدية تفترض أن جميع معلمات دالة كثافة احتمال اوقات الحياة (***Lifetime***) تكون دقيقة (***Crisp***) ولكن في تطبيقات العالم الحقيقي فان العشوائية والضبابية غالباً ماتكون خليطاً في اوقات الحياة للانظمة ويعبر عنها بارقام ضبابية ، ومن ثَمَّ فانه من الضروري اعمام أساليب التقدير الاحصائي الكلاسيكية للارقام الحقيقية الى ارقام ضبابية. ولكون معلمات التوزيع الاحتمالي احياناً لايمكن تسجيلها بدقة نظراً لاخطاء التجربة ، الحكم الشخصي ، التقدير ، او بعض المواقف غير المتوقعة عندئذٍ تكون المعلمات في توزيعات الحياة ضبابية(***Fuzzy***) ، لذلك فان نظام المعولية قد يصبح من الصعوبة ان يتعامل مع دالة المعولية التقليدية لذلك سيتم التعامل مع مصطلح اكثر شمولية من مصطلح المعولية التقليدية وهو المعولية الضبابية (***Fuzzy Reliability***). والتي تعرف بانها الاحتمال الضبابي لاستمرارية عمل المركبة او الوحدة بنجاح لمدة زمنية معينة ولدرجة انتماء يتم تحديدها وفق دالة انتماء معينة . بدأت ثمار المنطق الضبابي (العائم) تنضج على يد العالم الايراني الاصل لطفي زادة ***Lotfi Zadah*** عام ١٩٦٥ [٢٢] عندما استخدم مصطلح المتغيرات الضبابية على التعابير والالفاظ اللغوية التقريبية او غير دقيقة او غير محددة لذلك يكون اول من وضع اسس نظرية المجموعات الضبابية ***Fuzzy sets Theory*** إذ عرف المجموعة الضبابية بانها مجموعة من الكائنات التي لها درجات انتماء مستمرة والتي تميزها دالة انتماء تعيين لكل كائن في المجموعة درجة انتماء بين الصفر والواحد. وفي عام ٢٠٠٤ قدر (***Wu***) [١٩] المعولية الضبابية باستعمال المنهج البيزي ***Bayes Approach*** تحت البيئة الضبابية إذ افترض معالجة ضبابية لمتغيرات ضبابية بتوزيعات سابقة ضبابية واستخدمت طريقة تقدير بيز التقليدية لانشاء مقدر بيز النقطي الضبابي للمعولية بتضمين النظرية المعروفة باسم ***Resolution Identity*** في نظرية المجموعات الضبابية وحدد درجة انتماء لاي تقدير بيزي للمعولية. وفي عام ٢٠٠٦ حلل (***Huang***) و(***Zuo***) و (***Sun***) [٩] المعولية البيزية لبيانات الحياة الضبابية إذ استعمل طريقة بيز لتقدير المعولية الضبابية بالاعتماد على حجم عينة صغير إذ افترض طريقة جديدة لتحديد دالة الانتماء لتقدير المعلمات ودالة المعولية لتوزيعات حياة متعددة المعلمات وهي التوزيع الطبيعي وتوزيع وايبل. وفي عام ٢٠١٢ قدر (***Abbas***) و (***Yincai***) [٢] معلمة القياس لتوزيع فريچت بمعلمة شكل معلومة باستعمال طريقة الامكان الاعظم وطريقة العزوم الموزونة الاحتمالية وطريقة بيز لتوزيع اولي ***Jeffery*** ودالة خسارة تربيعية و دالة خسارة ***linex*** وكذلك دالة خسارة ***El − Sayyad*** عن طريق دراسة محاكاة باستعمال احجام عينات مختلفة بالاستناد إلى معيار متوسط مربعات الخطأ ***MSE*** . واستنتجا بان

طريقة الامكان الاعظم افضل من طريقة بيز من حيث التحيز عند زيادة قيمة α . وفي عام 2013قدر (Pak) و(Ali) و $(Saraj)$ [١٥] معولية توزيع رايلي $Rayleigh\ Distrbution$ بالاستناد إلى بيانات حياة ضبابية إذ استخدم منهجية بيز لتقدير معلمة ودالة المعولية للتوزيع من بيانات حياة ضبابية ، ولكون مقدرات بيز لا يمكن ان تعطى بصيغ واضحة، لذلك استعمل الباحثانون تقريبات مثل تقريب $Lindely$ ، وتقريب $Trereney$ ، وتقريب $Kadane$ المعروفة بطرائق سلاسل ماركوف مونتي كارلو لحساب مقدرات بيز لمعلمات ودالة معولية توزيع رايلي باستعمال المحاكاة بطريقة مونتي كارلو، واوضحت نتائج المحاكاة بان ***Tierney and Kandane's approximation T&k*** يعطي تقديرات دقيقة للمعلمات لذلك من المستحسن استعمال تقريب$Kadane\ \&\ Trereney$ في ايجاد تقديرات بيز وكذلك المعولية لتوزيع رايلي . وكذلك استعمل (Pak) و(Ali) و $(Saraj)$ [14] تقدير الامكان الاعظم $Maximum\ Liklihood\ Estimation$ وتقدير بيز $Bayes\ Estimation$ وتقدير العزوم $Moment\ estimation$ عندما تكون المشاهدات في صيغة بيانات ضبابية في الاستدلال حول معلمات توزيع وايبل$Weibul\ Distribution$ إذ استعمل طريقة نيوتن رافسون $Newton\ Rafson$ وطريقة تعظيم التوقع $Expectation\ maximization$ لايجاد تقديرات الامكان الاعظم وتقريب $Tierney\ and\ Kandane's\ approximation\ T\&k$ لايجاد تقديرات بيز لدالة خسارة تربيعية وطريقة تكرارية لايجاد تقديرات العزوم ،واستخدم المحاكاة مونتي كارلوا للمقارنة بين الطرائق، واستنتجوا بانه عندما يكون حجم العينة صغيراً ومتوسطاً فان مقدر بيز افضل من مقدر الامكان الاعظم ومن ثم ياتي بعدهم مقدر العزوم. وفي حالة كون حجم العينة كبيراً فان الطرائق الثلاثة تعطي التقديرات نفسها. وفي العام ٢٠١٥ استعمل الباحثان **(Pak)** [12] تقدير الامكان الاعظم **Maximum Liklihood Estimation** وتقدير بيز $Bayes\ Estimation$ وتقدير العزوم $Moment\ estimation$ لتقدير معلمة الشكل للتوزيع اللوغاريتمي الطبيعي $Log-Normal\ Distribution$ عندما تكون المشاهدات في صيغة بيانات ضبابية واستعمل طريقة نيوتن رافسون لايجاد تقديرات الامكان الاعظم وطريقة سلسلة ماركوف مونتي كارولوا لايجاد تقديرات بيز لانواع مختلفة من التوزيعات السابقة وكذلك طريقة العزوم واستخدم المحاكاة مونتي كارلوا للمقارنة بين الطرائق ، وتم التوصل الى ان تقديرات بيز المستندة إلى معلومات سابقة غير مشخصة بشكل كامل ، وكذلك تقدرات الامكان الاعظم تعطي نتائج تقدير متشابهة. وان تقدير بيز في حالة المعلومات السابقة المشخصة بشكل كامل تمتلك اقل متوسط مربعات خطأ ، لاحظ ايضاً بان اضافة اي معلومات سابقة عن المعلمة σ تحسن من المقدرات. وان متوسط مربعات الخطأ والتحيز يتناقص معنوياً في حالة زيادة حجم العينة . وفي عام **2017** قدر ***(Nathier A. Ibrahim)*** و ***(Hussein A. Mohammed)*** [1] معلمات ومعولية التوزيع الاسي الضبابي بمعلمتين إذ قدر معلمة القياس $(\boldsymbol{\lambda})$ بطريقة العزوم وطريقة الامكان الاعظم ثم قدروا دالة المعولية الضبابية و قارنوا النتائج باستعمال مقياس متوسط مربعات الخطأ , ووجدوا بان مقدر الامكان الاعظم هو الافضل , وكذلك المعولية الضبابية افضل عندما يكون المقدر هو مقدر الامكان الاعظم عند ال الضبابي$\tilde{\mathbf{k}}=\mathbf{0.3}$ واستنتجوا بان المقدر الضبابي

للمعولية افضل من المقدر التقليدي .وفي العام نفسه قدر الباحثان ($\boldsymbol{Pak}$) [13] توزيع ليندلي $Lindley\ Distribution$ بمعلمة واحدة عندما تكون البيانات المتوفرة في صيغة بيانات ضبابية إذ استعمل تقدير الامكان الاعظم $Maximum\ Liklihood\ Estimation$ وتقدير بيز $Bayes\ Estimation$ ، استخدم خوارزمية EM لتحديد تقدير الامكان الاعظم MLE للمعلمة وانشأ حدود ثقة باستعمال $asymptotic\ normality$ لمقدر الامكان الاعظم ، وفي طريقة بيز استعمال تقريب لابلاس المعروف باسم سلاسل ماكروف مونتي كارلوا لايجاد مقدر بيز للمعلمة ، وتم الحصول ايضاً على مدة ثقة سابقة للمعلمة المجهولة . وتوصل الباحثان عن طريق دراسة محاكاة مونتي كارلوا بان تقديرات بيز المستندة إلى معلومات سابقة غير مشخصة بشكل كامل $Non-Informative\ prior$ وكذلك تقدرات الامكان الاعظم تعطي نتائج تقدير متشابهة. وان تقدير بيز في حالة المعلومات السابقة المشخصة تماماً $Informative\ prior$ تمتلك اقل متوسط مربعات خطأ ولاحظ ايضاً بان اضافة اي معلومات سابقة عن المعلمة θ تحسن من المقدرات.

مشكلة البحث: ($\boldsymbol{Problem\ of\ Research}$)

حينما يتبين ان البيانات تمتلك صفة الضبابية تبرز مشكلة تتعلق بدقة تقديرات معلمات التوزيع الاحتمالي ، ولاجل معالجة هذه المشكلة ينبغي اعتماد اساليب التقدير المتخصصة بالضبابية بدلا من اساليب التقدير التقليدية . وبعد تحديد التوزيع الاحتمالي الضبابي نعمل على تقدير معلماته بطرائق مختلفة ومن ثم تقدير المعولية الضبابية $\boldsymbol{Fuzzy\ Reliability}$.

هدف البحث: ($\boldsymbol{Purpose\ of\ Research}$)

هدف البحث هو تقدير معلمات توزيع فريچت $\boldsymbol{Frechet\ Distribution}$ وهما معلمة الشكل $\boldsymbol{Shape\ parameter}\ \alpha$ ومعلمة القياس $\boldsymbol{scale\ parameter}$ بطريقة بيز عندما تكون بيانات اوقات الحياة عبارة عن ارقام ضبابية ($\boldsymbol{Fuzzy\ Numbers}$) ومن ثم استعمال التقديرات التي تم الحصول عليها في ايجاد تقدير دالة المعولية الضبابية للتوزيع $\boldsymbol{Fuzzy\ Relaibility\ Function}$ ومن ثم اختيار افضل تقدير لدالة المعولية الضبابية عن طريق المقارنة بمعيار متوسط مربعات الخطأ $\boldsymbol{Mean\ Square\ error}$ و متوسط مربعات الخطأ النسبي المطلق($\boldsymbol{Mean\ Absolut\ Proportional\ Error}$).

<u>المنطق الضبابي</u> ($\boldsymbol{Fuzzy\ logic}$): (٢٠,٢٢,٢٣)

يعد المنطق الضبابي من التقنيات الحديثة في تطوير الانظمة إذ اظهر مقدرة كبيرة في حل المشاكل على نطاق واسع في مجالات تطبيقية مختلفة ، ثم تطور هذا المنطق ليمس معظم الجوانب التكنولوجية الحديثة. ولوجود الكثير من الظواهر في العالم الحقيقي تتعامل مع معلومات غير دقيقة وغير محددة بشكل واضح جاءت نظرية المنطق الضبابي لسد ثغرات كبيرة في المنطق الكلاسيكي ($\boldsymbol{Crisp}$) للاستدلال في ظروف غير مؤكدة ($\boldsymbol{Uncertain}$) وغير دقيقة والذي يعد كحل لمشكلة تمثيل المعلومات التقريبية إذ يركز المنطق الضبابي على الاستنتاج عن طريق التعابير اللغوية إذ يتم اسناد درجة للمتغير (عنصر في المجموعة الشاملة) اي درجة انتماء في المجال الحقيقي $[\mathbf{0,1}]$ تساعد هذه الدرجة في

تحديد انتماء العنصر الى المجموعة الجزئية الضبابية. فهو نظريات وتقنيات تستعمل المجموعات الضبابية (***Fuzzy sets***) والتي هي مجموعات بلا حدود قاطعة فهو طريقة سهلة لتوصيف وتمثيل الخبرة البشرية كما انه يقدم الحلول العلمية للمشاكل الواقعية مع اختزال الوقت والكلفة مقارنة بالحلول التي تقدمها التقنيات الاخرى.

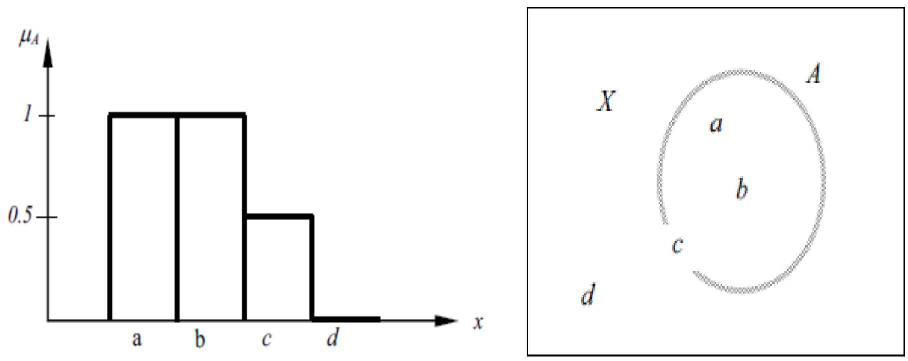
المجموعة الضبابية (***Fuzzy set***) : [٢٠,19,21]

مجموعة حدودها غامضة ، كل عنصر في المجموعة الضبابية له درجة انتماء معينة ، وتُميَّز المجموعة الضبابية بدالة انتماء ***Membership function*** التي تخصص لكل عنصر في المجموعة درجة انتماء في المدة $[0,1]$. وفيها يسمح للعنصر او الكائن بالانتماء الجزئي ***Partial Membership*** .

لتكن X مجموعة شاملة فان المجموعة الضبابية الجزئية $\tilde{A}$ من X والمميزة بدالة انتماء $\mu_{\tilde{A}}(x)$ التي تنتج قيم بين $[0,1]$ لكل قيم x في فضاء العينة الضبابية X .

$$\tilde{A} = \{(x_i, \mu_{\tilde{A}}(x_i)), x \in X, i = 1,2,3, \dots \dots n, o < \mu_{\tilde{A}}(x) < 1\} \qquad \dots (1)$$

لنفرض ان $\mu_{\tilde{A}}(x_0) = 1$ فان x_0 ينتمي تماماً الى $\tilde{A}$ واذا كانت $\mu_{\tilde{A}}(x_1) = 0$ فان x_1 لا ينتمي تماماً الى المجموعة $\tilde{A}$ واذا كانت $\mu_{\tilde{A}}(x_1) = 0.6$ فان x_1 ينتمي بدرجة ٠.٦ الى $\tilde{A}$. واذا كانت $\mu_{\tilde{A}}(x)$ مساوية الى واحد او صفر سنحصل على مجموعة جزئية غير ضبابية ***Crisp subset*** من فضاء العينة X .



الشكل (١) التمثيل البياني للمجموعة الضبابية *Fuzzy set*

دالة الانتماء (العضوية) ***Membership function***: [٥، ٨]

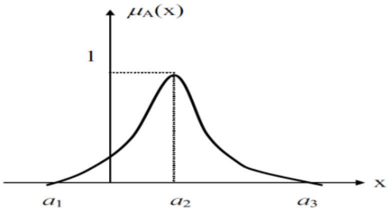
يُعد مفهوم دالة الانتماء ***Membership function*** الاكثر اهمية في نظرية المجموعات الضبابية والتي تستعمل لتمثيل مختلف انواع المجموعات الضبابية . وهي الدالة التي تنتج قيم ضمن الفترة $[0,1]$ لتعبر عن درجة انتماء كل عنصر في المجموعة الشاملة الى المجموعة الضبابية *Fuzzy set* ، بمعنى اخر هي الخريطة التي ترسم درجة الصحة (درجة تحقق العضوية) لانتماء كل عنصر في المجموعة الشاملة الى المجموعة الضبابية ، وهي دالة ذات قيمة غير سالبة ، والشرط الاساس لهذه الدالة ان يكون مداها بين الصفر والواحد.

الارقام الضبابية $Fuzzy\ Numbers$: [٤,١٠]

الارقام الضبابية تستعمل لوصف حالة عدم التاكد ، وهي ارقام غالباً ما تكون ثلاثية الشكل $Traingular$ او شبه منحرفة الشكل $Trapizoidal$ او اي شكل اخر .

وال الضبابي هو مجموعة ضبابية بالشروط الاتية :

١- مجموعة ضبابية محدبة $Convex$ ومعيارية $Normalized$
٢- دالة الانتماء $\mu_{\tilde{a}}$ شبه مستمرة من الاعلى
٣- مجموعة المستوى α محددة لكل $\alpha \in [0,1]$
٤- معرفة على مجموعة الاعداد الحقيقية R



الشكل (٢) يمثل ال الضبابي

ال الضبابي المثلثي $Traingular\ Fuzzy\ Number$: [15، 13]

يعرف بثلاثة ارقام a_1, a_2, a_3 إذ $a_1 < a_2 < a_3$ وقاعدة المثلث الفترة $[a_1, a_3]$ وراسه عند $x = a_2$ ويمكن ان يكتب بالصيغة الاتية :

$$\tilde{N} = (a_1/a_2/a_3)$$

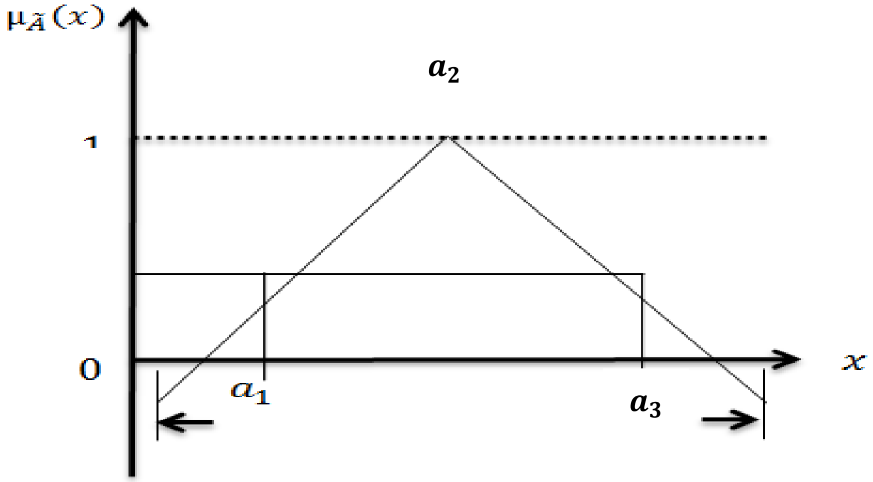
ويكون ال الضبابي المثلثي $\tilde{N} = (a_1/a_2/a_3)$ مميز بدالة انتماء مثلثية $Traingular\ membership\ fucntion$ وصيغتها كالاتي :

$$\mu_{\tilde{N}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1 \le x \le a_2 \\ \frac{a_3-x}{a_3-a_2} & a_2 \le x \le a_3 \\ 0 & o.w \end{cases} \qquad \dots(2)$$

فمثلاً ال الضبابي المثلثي الاتي :

$$\tilde{N} = (1.2/2/2.4)$$

المبين في الشكل (٣) نلحظ انه $\tilde{N} = (1.6) = 0.5$ و $\tilde{N} = (2) = 1$



الشكل (٣) يمثل ال الضبابي المثلثي $\tilde{N} = (a_1/a_2/a_3)$

ال الضبابي شبه المنحرف $:$***Trapizoidal Fuzzy Number*** (13، 15)

يعرف باربعة ارقام a_1, a_2, a_3, a_4 إذ $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ وقاعدة المثلث الفترة $[a_1, a_4]$ وقمته عند الفترة $[a_2, a_3]$ ويمكن ان يكتب بالصيغة الاتية :

$$\tilde{M} = (a_1/a_2, a_3/a_4)$$

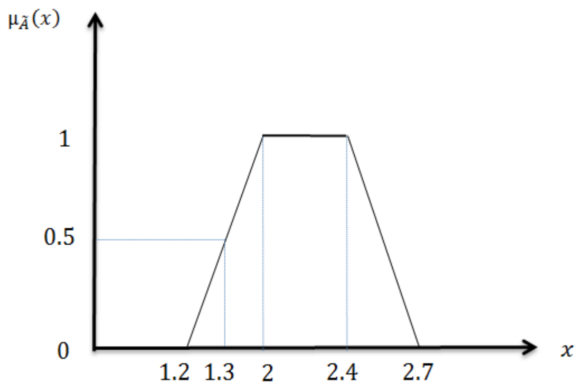
ويكون ال الضبابي شبه المنحرف $\tilde{M} = (a_1/a_2, a_3/a_4)$ مميز بدالة انتماء شبه منحرفة ***Trapizoidal membership fucntion*** وصيغتها كالاتي :

$$\mu_{\tilde{M}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1 \le x \le a_2 \\ 1 & a_2 \le x \le a_3 \\ \frac{a_4-x}{a_4-a_3} & a_3 \le x \le a_4 \\ 0 & o.w \end{cases} \qquad ...(3)$$

لتوضيح ماهو الضبابي الشبه المنحرف نفرض ال الضبابي الاتي :

$$\tilde{N} = (1.2/2, 2.4/2.7)$$

المبين في الشكل (٤) ونلحظ أنه $\tilde{N} = (2, 2, 4) = 1$ و $\tilde{N} = (1.3) = 0.5$



الشكل (٤) يمثل ال الضبابي شبه المنحرف $\widetilde{M} = (a_1/a_2, a_3/a_4)$

فضاء العينة الضبابي $: \textit{Fuzzy sample space}$ [١٤،١٨]

هو الاجزاء الضبابية $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots \dots \dots, \tilde{x}_n)$ من $X = (X_1, \dots \dots \dots, X_n)$ ، بعبارة اخرى هو مجموعة المجموعات الجزئية الضبابية لـ X بدوال انتماء لها قياس بوريل $\textit{Borel Measure}$ ، وتحقق قيد التعامد :

$$\sum_{\tilde{x} \in X} \mu_{\tilde{x}}(x) = 1$$

لكل $x \in X$ ، ويسمى ايضا نظام المعلومات الضبابية $\textit{FIS}$.

الحدث الضبابي $:\textit{Fuzzy Event}$ [38، 36، 37،41]

لتكن $X = (X_1, \dots \dots \dots, X_n)$ مجموعة في الفضاء الاقليدي $\textit{Euclidean space}$ التي تمثل المجموعة الشاملة و B_x اصغر حقل (جبر) سيكما بورل $\textit{Smallest Borel } \sigma - \textit{Field}$ في X . وان اصغر حقل سيكما بوريل يضم اصغر جبر سيكما لكل المجموعات المفتوحة (المغلقة) عن طريق التقاطع والاتحاد والاتمام النسبي.

فان الحدث الضبابي في X هو المجموعة الضبابية الجزئية $\tilde{A}$ ($\textit{Fuzzy subset}$) من X التي دالة انتمائها $\mu_{\tilde{A}}(x)$ دالة قابلة للقياس بوريل $\textit{Borel measurable}$.

التوزيع الاحتمالي الضبابي $: \textit{Fuzzy probability Distribution}$ [١٥،12 ،13]

لنفترض انه لدينا تجربة W لها فضاء احتمالي (X, f, P_θ) إذ (X, f) قابل للقياس Mesureable و P_θ ينتمي الى عائلة المقاييس الاحتمالية $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ في (X, f). فان المجموعة الضبابية $\tilde{A}$ في X لها دالة انتماء $\mu_{\tilde{A}}(w)$ التي تربط كل نقطة w في X عدد حقيقي في الفترة [0,1] حيث $\mu_{\tilde{A}}(w)$ تمثل درجة الانتماء للـ w في$\tilde{A}$.

وان X مجموعة في الفضاء الاقليدي (R) و f اصغر حقل سيكما – بوريل (smallest Boral σ –field) في X. فان الحدث الضبابي $\textit{Fuzzy event}$ هو المجموعة الضبابية الجزئية $\tilde{A}$ في X التي دالة انتماءها $\mu_{\tilde{A}}$ لها قياس بوريل $\textit{Borel Measure}$، فان التوزيع الاحتمالي الضبابي في $\widetilde{W}$ هو الراسم P_θ في $\widetilde{W}$ الى الفترة [0,1] بحيث:

$$P_\theta(\widetilde{w}) = \int_\Omega \mu_{\tilde{A}}(w) dP_\theta(w) \quad ; \widetilde{w} \in \widetilde{W} \qquad \dots(4)$$

إذ أن $P_\theta(w)$ مقياس احتمال العنصر w و $\mu_{\tilde{A}}(w)$ دالة انتماء العنصر w في المجموعة الضبابية الجزئية $\tilde{A}$

الاحتمال الشرطي الضبابي $: \textit{Fuzzy Conditional Probability}$ [12،13 ،14]

نفرض ان P_θ يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي Y بدالة كثافة احتمالية $g(Y)$، فان دالة الكثافة الشرطية للـ Y عندما تكون $\tilde{A}$ معطاة كالاتي :

$$g(Y/\tilde{A}) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(y) g(y)}{\int \mu_{\tilde{A}}(u) g(u) du} \qquad \dots(5)$$

وهي المجموعة المؤلفة من كل الاحداث المشاهدة من التجربة المحددة بنظام المعلومات الضبابية $\textit{FIS}$ ($\textit{Fuzzy Information System}$) المرتبط بها.

توزيع فريجت $Frechet\ Distribution$: [6,7 ,11 ,16]

يعد توزيع فريجت من احدث التوزيعات الاحتمالية لنماذج ازمنة الحياة $Lifetime\ models$. قُدم هذا التوزيع من لدن عالم الرياضيات الفرنسي $Maurice\ Frechet$ (١٨٢٨–١٩٧٣). وله تطبيقات واسعة في نمذجة وتحليل الكثير من الاحداث مثل الهزات الارضية ، الزلازل، الفيضانات، سقوط الامطار، سرعة الرياح، اختبارات الحياة، تيارات البحار، السلوك الاحصائي لخواص المواد في المجالات الهندسية وكذلك يستعمل في نمذجة وفيات الاطفال الرضع وفي نمذجة فترات فعاليات الكلف والفعاليات الخاصة بفترات الصيانة. ويستخدم توزيع فريجت في نمذجة معدلات الفشل والتي هي شائعة الاستعمال في دراسة المعولية $Reliability$ والدراسات البايولوجية وتحليل الاشارات الضوئية وبناء نماذج الاخطاء.

اقترح الباحثان (Drapella) (١٩٩٣) و الباحثان ($Mundhol\ Karad\ Kollia$) (١٩٩٤) اسم معكوس وايبل او مقلوب وايبل $Resprocal\ of\ Wiebul$ على توزيع فريجت.

فاذا كان x متغيراً عشوائياً له توزيع وايبل $Wiebul\ distrbution$ فان $y = \frac{1}{x}$ يمثل مقلوب قيم المتغير العشوائي x يكون له توزيع فريجت بدالة الكثافة الاحتمالية الاتية :

$$f(x,\alpha,\beta) = \alpha\beta^{\alpha}x^{-(\alpha+1)}\exp(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}); x > 0 \qquad \dots (6)$$

وان $\alpha > 0$ معلمة الشكل $Shape\ Parametere$ و $\beta > 0$ معلمة القياس $Scale\ Parametere$

وان الدالة التوزيعية $Cummulative\ Distribution\ Function$ تعطى بالشكل الاتي :

$$F(x) = P(X \le x) = \int_0^x f(u)du = \exp(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}) \ ;\ x > 0 \qquad \dots (7)$$

وان دالة المعولية ($Reliability\ Function$) كالاتي :

$$R(t) = 1 - F(t) = \int_t^{\infty} f(t)dt = 1 - \exp(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}) \qquad \dots (8)$$

ودالة المخاطرة ($Hazard\ Function$) كالاتي :

$$H(t) = \alpha\beta^{\alpha}t^{-(\alpha+1)}\exp(-\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\alpha})(1 - \exp\left(-\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\alpha}\right))^{-1} \qquad \dots (9)$$

وان العزم ذو المرتبة k حول نقطة الاصل $\mathrm{K'th\ Monent\ about\ origin}$:

$$\mathrm{EX}^k = \int_0^{\infty} \mathrm{X}^k f(x)dx = \beta^k\,\Gamma(1\text{-}\frac{k}{\alpha}) \ ;\ k=1,2,3, \qquad \dots (10)$$

وان متوسط وتباين التوزيع $Mean\ \&\ Variance$:

$$\mu_x = \beta\Gamma(1-\frac{1}{\alpha}) \qquad \dots.(11)$$

$$\sigma_x^2 = \beta^2\Gamma(1-\frac{2}{\alpha}) - \Gamma^2(1-\frac{1}{\alpha}) \qquad \dots (12)$$

المعولية الضبابية: $\boldsymbol{Fuzzy\ Reliability}$ [١٥,٧,٣]

تعرف المعولية $Reliability$ بانها احتمال بقاء الوحدة اوالجهاز صالحاً للعمل بعد مرور مدة من الزمن(t) على الاستعمال فاذا كان T متغيراً عشوائياً مستمراً ، $T > 0$ فان دالة المعولية $R_T(t)$ هي :

$$R_T(t) = P(T \geq t) = \int_t^{\infty} f_T\,(x)dx = 1 - \int_0^t f_T\,(x)dx = 1 - F_T(t)$$

ومن خصائصها :

- ✓ $R(0) = p(T < 0) = 1$
- ✓ $R(\infty) = 1$
- ✓ $0 \leq R(t) \leq 1$
- ✓ اذا $t_1 < t_2$ فان $R(t_1) \geq R(t_2)$

والآن يمكننا ان نقول إن المعولية الضبابية تمثل احتمال اداء الوحدة للعمل المطلوب منها بدرجات متفاوتة من النجاح لمدة محددة من الوقت تحت الظروف الاعتيادية ويرمز لها $\tilde{R}$ والتي هي دالة في المجموعة الضبابية $\tilde{A}$

وليكن $\mu_{\tilde{A}_i}(R)$ تمثل درجة انتماء R في $\tilde{A}_i$ فان :

$$\tilde{R} = \mu_{\tilde{A}_i}(R).R$$

وبما ان :

$$R(t) = \int_t^{\infty} f\,(t)dt$$

فان :

$$\tilde{R} = \mu_{\tilde{A}_i}(R).\int_t^{\infty} f\,(t)dt$$

ان دالة معولية توزيع فريچت هي :

$$R(t) = 1 - \exp(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha})$$

سوف نفرض بان قيم المتغير العشوائي الضبابي $\tilde{T}$ هي ضبابي:

$$\tilde{t} = \{[0,\infty), \mu_{\tilde{t}_i}\}$$

اذن: $\tilde{t} = \tilde{k}t$ و $t \in T$

لذلك فان الضبابية هي ضبابي مثلثي حقيقي :

$$\tilde{k} = \{[0,\infty), \mu_{\tilde{k}}\}$$

وان :

$$\mu_{\tilde{k}}(k) = \begin{cases} \frac{k-k_{min}}{1-k_{min}} & k \in (k_{min}, 1) \\ \frac{k-k_{max}}{1-k_{max}} & k \in (1, k_{max}) \\ 0 & o.w \end{cases}$$

بحيث : $0 < k_{min} \leq 1 \leq k_{max}$

فاذا كان المتغير العشوائي T له توزيع فريچت تقليدي بدالة كثافة احتمالي $Frechet(\alpha,\beta)$ فان المتغير العشوائي الضبابي $\tilde{T}$ المقابل له تويع فريچت بدالة كثافة احتمالية ضبابية $\widetilde{Frechet}(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})$ بالخواص الاتية :

لكل $t \in [0,\infty)$ ، فان دالة التوزيع الضبابي التراكمي ($\boldsymbol{The\ Cumulative\ Fuzzy\ Distribution\ Function}$) تكون :

$$\widetilde{\boldsymbol{F}}(\tilde{\boldsymbol{t}}) = \mathbf{exp}\left(-\left(\frac{\widehat{\boldsymbol{\beta}}}{\widetilde{\boldsymbol{k}\boldsymbol{t}}}\right)^{\widehat{\boldsymbol{\alpha}}}\right) \;;\; \tilde{t} > 0 \qquad \ldots(١٣)$$

بينما دالة المعولية الضبابية تصبح :

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{t}) = \mathbf{1} - \boldsymbol{exp}\left(-\left(\frac{\widehat{\boldsymbol{\beta}}}{\widetilde{\boldsymbol{k}\boldsymbol{t}}}\right)^{\widehat{\boldsymbol{\alpha}}}\right) \qquad \ldots(١٤)$$

طريقة بيز الضبابية $\boldsymbol{Fuzzy\ Bays\ Method}$: (١٤ ، ١٢،١٣،١٥)

تفترض نظرية بيز $\boldsymbol{Bayes\ Theorem}$ أن المعلمة (المعلمات) غير المعروفة متغيرات عشوائية $\boldsymbol{Random\ Variables}$ وان هنالك معلومات سابقة عنها (اولية) تصاغ تلك المعلومات على شـــكل توزيع احتمالي يعرف بدالة الكثافة الاحتمالية الاولية $\boldsymbol{Prior\ Probability\ function}$ إذ يتم التعرف على هذه المعلومات من بيانات وتجارب سابقة او من النظرية التي تحكم الظاهرة. وايضاً تعتمد نظرية بيز على المعلومات الحالية للعينة التي يمكن ان تمثل بدالة الامكان $\boldsymbol{Likelihoods\ Function}$ الخاصة بالمشاهدات . وبدمج دالة الكثفافة الاحتمالية للمعلمات مع دالة الامكان الاعظم للمشاهدات الحالية نحصل على التوزيع الاحتمالي اللاحق $\boldsymbol{Posterior}$ والذي عن طريقه وتحت دالة خسارة معينة نستخرج تقديرات بيز .

لنفرض ان $(x_1, \ldots \ldots \ldots, x_n)$ قياسات عينة عشوائية بحجم n لها توزيع فريچت $Frechet\ Distribution$ بدالة كثافة احتمالية :

$$f(x,\alpha,\beta) = \alpha\beta^{\alpha}x^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right) \;;\; x > 0 \qquad \ldots(١٥)$$

وليكن $X = (X_1, \ldots \ldots, X_n)$ المتجه العشوائي الذي يمثل المجموعة الشاملة ، فاذا كان $x = (x_1, \ldots \ldots \ldots, x_n)$ من X فانه يمكن الحصول على دالة الامكان الاعظم للبيانات الكاملة $Not\ Fuzzy$ كالاتي :

$$f(\alpha,\beta;x) = \alpha^n\beta^{n\alpha}\prod_{i=1}^{n}x^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right) \qquad \ldots(16)$$

إذ أن x هنا مشاهدة بصورة واضحة ومتوفرة معلومات كاملة عنها .

والان لنعد مشكلة ان x غير مشاهدة بصورة واضحة ودقيقة ومتوفرة معلومات جزئية عنها في صيغة مجموعة ضبابية جزئية $(Fuzzy\ subset)$ بدالة انتماء $\mu_{\tilde{A}}(x)$ لها قياس بوريل $Borel\ measure$.

وليكن $\pi_1(\alpha)$ و $\pi_2(\beta)$ التوزيع الاولي للمعلمة α و β على الترتيب والذي سوف يفترض بان يكون توزيع كاما $Gamma\ Distrbution$ كالاتي :

$$\pi_1(\alpha) = \frac{d^c}{\Gamma c}\alpha^{c-1}\exp(-\alpha d)$$

$$\pi_2(\beta) = \frac{b^a}{\Gamma a}\beta^{a-1}\exp(-\beta b)$$

إذ أن $\alpha \sim gamma(c,d), \beta \sim gamma(a,b)$

وبالاستناد إلى تلك التوزيعات الاحتمالية الاولية آنفاً فان دالة الكثافة اللاحقة المشتركة $Joint\ Posterior\ function$ للـ α و β تكتب كالاتي :

$$\pi_1(\alpha,\beta \mid \tilde{x}) = \frac{\pi_1(\alpha).\pi_2(\beta).\ell(\alpha,\beta;\tilde{x})}{\iint \pi_1(\alpha).\pi_2(\beta).\ell(\alpha,\beta;\tilde{x})d\alpha d\beta} \qquad ...(17)$$

إذ :

$$\ell(\alpha,\beta;\tilde{x}) = \alpha^{(n)}\beta^{(\alpha n)}\exp(-\alpha d)\exp(-\beta b).\prod_{i=1}^{n}\int x^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx$$

$$\ell(\alpha,\beta;\tilde{x}) = \alpha^{n}\beta^{n\alpha}\prod_{i=1}^{n}\int_0^{\infty} x^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}dx \qquad ...(18)$$

وتمثل الصيغة (2-35) دالة الامكان الاعظم المستندة إلى عينة ضبابية $\tilde{x}$.ان دالة التوزيع اللاحق $(posterior)$ هي دالة ناتجة من التوزيع الاولي للمعلمات المجهولة *(prior)* ودالة الامكان للمشاهدات $(Likelihood\ function)$ أي ان:

$$f(\theta / x) = \frac{k(\theta,x)}{\int k(\theta,x)} \qquad ...(19)$$

اذ ان:

(θ) تمثل المعلمة او المعلمات المجهولة

$k(\theta,x)$ التوزيع الاحتمالي المشترك للمعلمات المجهولة و مشاهدات العينة

$\int k(\theta,x)$ التوزيع الحدي لمشاهدات العينة.

ان المعادلة (٢-٣٦) يمكن كتابتها بالشكل ادناه :

$$f(\alpha,\beta / \tilde{x}) = \frac{\alpha^{(n+c-1)}\beta^{(\alpha n+a-1)}\exp(-\alpha d)\exp(-\beta b)\prod_{i=1}^{n}\int x^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx}{\int\int \alpha^{(n+c-1)}\beta^{(\alpha n+a-1)}\exp(-\alpha d)\exp(-\beta b)\prod_{i=1}^{n}\int x^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dxd\beta d\alpha} \qquad ...(20)$$

وعلى فرض ان$g(\alpha,\beta)$ دالة خسارة ، وبما ان مقدر بيز هو ذلك المقدر الذي يجعل توقع دالة الخسارة في نهايتها الصغرى، فان توقع دالة الخسارة يكون كالاتي:

$$E(g(\alpha,\beta \mid \tilde{x})) = \frac{\int\int g(\alpha,\beta)\alpha^{(n+c-1)}\beta^{(\alpha n+a-1)}\exp(-\alpha d)\exp(-\beta b)\prod_{i=1}^{n}\int x^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dxd\beta d\alpha}{\int\int \alpha^{(n+c-1)}\beta^{(\alpha n+a-1)}\exp(-\alpha d)\exp(-\beta b)\prod_{i=1}^{n}\int x^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dxd\beta d\alpha} \qquad ...(21)$$

المعادلة (21) يمكن اعادة صياغتها بالشكل الاتي:

$$E(g(\alpha,\beta \mid \tilde{x})) = \frac{\int\int g(\alpha,\beta)e^{nQ}d\beta d\alpha}{\int\int e^{nQ}d\beta d\alpha} \qquad ...(22)$$

اذ ان:

$$Q(\alpha,\beta) = ln(\pi_1(\alpha)\pi_2(\beta)\ell(\alpha,\beta;\tilde{x}) \equiv \rho(\alpha;\beta) + \mathcal{L}(\alpha;\beta)$$

على فرض ان $g(\alpha,\beta) = \alpha$ تكون المعادلة (21) كالاتي:

$$E(g(\alpha,\beta \mid \tilde{x})) = \frac{\int\int \alpha\, e^{nQ} d\beta d\alpha}{\int\int e^{nQ} d\beta d\alpha}$$

ويمكن اعادة صياغتها كالاتي :

$$E(g(\alpha,\beta \mid \tilde{x})) = \frac{\int\int\ e^{n\bar{F}} d\beta d\alpha}{\int\int e^{nF} d\beta d\alpha} \qquad \ldots (23)$$

ونلحظ من المعادلة (23) انه لايمكن حلها باستعمال الطرق الرياضية الاعتيادية ، لذى سيتم حلها باستعمال خـوارزمية تكرارية تعتمد علـــى طريقة ($Tierney\ and\ Kandane's\ approximation\ T\&k$) للحصول على تقديرات بيز $\widehat{\alpha}_{bays}$ و $\hat{\beta}_{bays}$ وكما ياتي:

ان خوارزمية *(T&k)* هي خوارزمية تكرارية يتم عن طريقها ايجاد الحل للصيغة الاتية:

$$\hat{g}(\alpha,\beta) = \left(\frac{\bar{\mathrm{H}}}{H}\right)^{1/2} exp\left(n\left(\bar{F}(\acute{\alpha},\acute{\beta}) - F(\alpha,\beta)\right)\right) \qquad \ldots (24)$$

اذا ان:

$$\bar{F}(\acute{\alpha},\acute{\beta}) = \left(ln(\acute{\alpha}) + ln\left(\acute{\alpha}^{n+c-1}\beta^{n\alpha+a-1}exp(-\acute{\alpha}d)\ exp(-\beta b)\prod\int x^{-(\acute{\alpha}+1)}\ exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx\right)\Big/ n \ldots (٢٥)$$

$$F(\acute{\alpha},\beta) = \left(ln\left(\alpha^{n+c-1}\beta^{n\alpha+a-1}exp(-\alpha d)\ exp(-\beta b)\prod\int x^{-(\alpha+1)}\ exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx\right)\Big/ n. (2٦)$$

حيث ان $(\acute{\alpha},\beta)$هي قيمة ال**معلمات** المقدرة التي تعظم المقدار $\bar{F}(\acute{\alpha},\beta)$ ، (α,β) هي قيمة ال**معلمات** التي تعظم المقدار $F(\acute{\alpha},\beta)$ ، وقد تم استعمال طريقة نيوتن رافسون لايجاد القيم المجهولة. $(\bar{H}\,;H)$ تمثل المحدد لمصفوفة المشتقات الجزئية للمعادلاة $(\bar{F};F)$ على الترتيب.

$$\frac{dF^2}{d\alpha d\alpha} = -\frac{n+c}{n\,\alpha^2} - \sum\left(\frac{1}{\left(\int x^{-(\alpha+1)}\cdot \exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\cdot\mu\cdot dx\right)}\left(\int -x^{-\alpha-1}\ln(x)^2 e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}} - x^{-\alpha-1}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\ln\left(\frac{\beta}{x}\right)^2 e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}\right) + \left(\frac{\left(\int x^{-\alpha-1}\ln(x)\, e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}} - x^{-\alpha-1}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\ln\left(\frac{\beta}{x}\right) e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}\cdot\mu\cdot dx\right)^2}{\left(\ln\int x^{-(\alpha+1)}\cdot\exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\cdot\mu\cdot dx\right)^2}\right)\right)$$

$$\frac{dF^2}{d\beta d\beta} = -\frac{n\,\alpha + a}{n\,\beta^2} - \sum\frac{1}{\left(\int x^{-(\alpha+1)}\cdot\exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu dx\right)}\left(\int x^{-\alpha-1}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}} - x^{-\alpha-1}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\frac{\alpha}{\beta^2}e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}} - x^{-\alpha-1}\left(\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}\mu dx - \left(\int x^{-\alpha-1}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\frac{\alpha}{\beta}e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}\mu dx\right)\int -x^{-\alpha-1}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\frac{\alpha}{\beta}e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}\mu dx\right)$$

$$\frac{dF^2}{d\alpha d\beta}=\frac{1}{\beta}-\sum\frac{1}{\left(\int x^{-(\alpha+1)}\cdot\exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\cdot\mu\cdot dx\right)}\left(x^{-\alpha-1}\ln(x)\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\frac{\alpha}{\beta}e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}\right.$$

$$\left.+x^{-\alpha-1}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\frac{\alpha}{\beta}\ln\left(\frac{\beta}{x}\right)e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}+x^{-\alpha-1}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\frac{1}{\beta}e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}-x^{-\alpha-1}\left(\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)^{2}\ln\left(\frac{\beta}{x}\right)\frac{\alpha}{\beta}e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}\right)-$$

$$\left(\frac{\left(\int x^{-\alpha-1}\ln(x)\,e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}+x^{-\alpha-1}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\ln\left(\frac{\beta}{x}\right)e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}\cdot\mu\cdot dx\right)\cdot\left(\int -x^{-\alpha-1}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\frac{\alpha}{\beta}e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}\cdot\mu\cdot dx\right)}{\left(\int x^{-(\alpha+1)}\cdot\exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\cdot\mu\cdot dx\right)^{2}}\right)$$

بافتراض قيم اولية للمعلمات $(\acute{\alpha},\alpha,\beta)$ ومن ثم ايجاد قيم $(\acute{\alpha},\alpha,\beta)$ التي تعظم المعادلتين (25) و (26) والتعويض في المعادلة (24) نحصل على قيمة (α) . وللحصول على القيمة المقدرة للمعلمة (β) يتم اعادة الخطوات السابقة بافتراض ان $g(\alpha,\beta)=\beta$.

الجانب التجريبي (المحاكاة): ***Simulation***

وصف تجربة المحاكاة: ***Describe of simulation experiment***

تم اعتماد اسلوب المحاكاة مونتي كارلو $(Simulation - Monte\ Carlo)$ لغرض المقارنة بين طرائق التقدير لدالة المعولية لتوزيع فريچت $Frechet\ Distribution$ وكذلك لتوضيح تأثير طريقة تقدير دالة المعولية الضبابية تجاه ما ياتي :

١- التغير في حجم العينة $Sample\ Size$.

٢- التغيير في العلاقة بين معلمة الشـكل $(shape\ Parameter)$ α و معلمة القياس $(Scale\ Parameter)$ β.

وللحصول على تقديرات المعولية الضبابية سيتم اولاً تقدير معلمات توزيع فريچت α و β وفق الطرائق المذكورة في الفقرة (٥.٢) كالاتي :

- **اختيار احجام العينات** ***Sample Sizes*** :

  اختيرت عدة احجام عينات $(\boldsymbol{n = 10, 50, 100, 150, 500})$.

- **اخـــتيار قـــــيم افتراضـية لمعلمات توزيع فريچت** ***Choosing Hypothesis Values of Parameters***:

  اختيرت عدة قيم افتراضية لمعلمة الشكل $\boldsymbol{\alpha}$ ومـعلمة القياس $\boldsymbol{\beta}$ لتوزيع فريچت وكما موضح في الجدول (٣-١).

جدول (3-1) القيم الافتراضية(الاولية) لمعلمات توزيع فريچت

Parameter	α	β	α	β	α	β
value	0.50	0.50	0.5	0.1	3	1.5

- توليد البيانات ***Data generation*** :
- توليد متغير يتبع توزيعاً منتظماً $\mathbf{u \sim U(0,1)}$ بالاستعانة بالايعاز $Rand$
- توليد بيانات ضبابية تتبع توزيع فريچت بتطبيق طريقة التحويل المعكوس وباستعمال الصيغة الاتية:

$$t_i = \beta\left(Ln\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad ; \; i = 1,2,\ldots\ldots,n \qquad ...(٢٧)$$

والعينة العشوائية مستقلة ومتماثلة التوزيع $(i.i.d)$ متمثلة بالمتجه t من توزيع فريچت وتم تحويل متجه العينة t الى الضـبابية باستعمال نظام المعلومات الضبابية الافتراضي $Fuzzy\ Hypothetical\ \ information\ system$ المبين في الشكل (٥) المقابل لدوال الانتماء الاتية:

$$\mu_{\tilde{t}_1}(t) = \begin{cases} 1 & t \le 0.05 \\ \frac{0.25-t}{0.2} & 0.05 \le t \le 0.25 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{t}_2}(t) = \begin{cases} \frac{t-0.05}{0.2} & 0.05 \le t \le 0.25 \\ \frac{0.5-t}{0.25} & 0.25 \le t \le 0.5 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{t}_3}(t) = \begin{cases} \frac{t-0.25}{0.25} & 0.25 \le t \le 0.5 \\ \frac{0.75-t}{0.25} & 0.5 \le t \le 0.75 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{t}_4}(t) = \begin{cases} \frac{t-0.5}{0.25} & 0.5 \le t \le 0.75 \\ \frac{1-t}{0.25} & 0.75 \le t \le 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

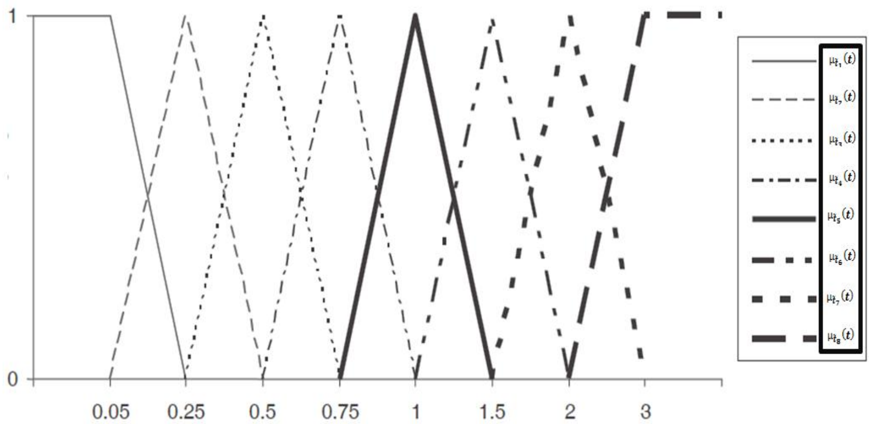
$$\mu_{\tilde{t}_5}(t) = \begin{cases} \frac{t-0.75}{0.25} & 0.75 \le t \le 1 \\ \frac{1.5-t}{0.5} & 1 \le t \le 1.5 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{t}_6}(t) = \begin{cases} \frac{t-1}{0.5} & 1 \le t \le 1.5 \\ \frac{2-t}{0.5} & 1.5 \le t \le 2 \end{cases}$$

$0 \qquad o.w$

$$\mu_{\tilde{t}_7}(t) = \begin{cases} \frac{t-1.5}{0.5} & 1 \le t \le 1.5 \\ 3-t & 2 \le t \le 3 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{t}_8}(t) = \begin{cases} t-2 & 2 \le t \le 3 \\ 1 & t \ge 3 \\ 0 & o.w \end{cases}$$



شكل (٥) نظام المعلومات الضبابية الافتراضي المستخدم في تضبيب بيانات المحاكاة

- استعملت خـوارزمية تكرارية تعتمد على طريقة ($Tierney\ and\ Kandane's\ approximation\ T\&k$) للحصول على تقديرات بيز ، ولحساب مقدرات بيز ، سنفترض بان α و β لها توزيع اولي كاما $\alpha \sim gamma(a,b), \beta \sim gamma(c,d)$ ، وسنفترض بان التوزيعات الاولية للمعلمات غير كاملة المعلومات ($Non\ Informative$)، اقترح $Press(2011)$ استعمال قيم غير سالبة صغيرة جدا للمعلمات الفوقية في التوزيع الاولي ، لذلك سنفترض $a = b = c = d = 0.0001$ وبحجوم العينات المفترضة، و بتكرار (1000) مرة لكل تجربة محاكاة لغرض الحصول على اكبر تجانس $Homogenous$ في تقدير دالة المعولية لتوزيع فريچت وقد نفذت تجارب المحاكاة باستعمال لغة البرمجة $Matlab$.
- تم توليد قيم دالة المعولية الضبابية باستعمال الصيغة الاتية :

$$\tilde{R}(t_i) = 1 - exp\left(-\left(\frac{\hat{\beta}}{\tilde{t}_i}\right)^{\hat{\alpha}}\right) \; ; i = 1,2,\dots\dots,n \qquad ...(٢٨)$$

- بعد توليد القيم العشوائية الضبابية $(\tilde{t}_i)$ من دالة CDF وفقا الى احجام عينات معلومة وقيم افتراضية للمعلمات(اولية حسب الصيغة (27)، تم تعويض قيم $(\tilde{t}_i)$ والمعلمات الاولية حسب دوال الانتماء $\mu_{\tilde{t}_i}(t)$ المقابلة لكل مشاهدة عشوائية $(\tilde{t}_i)$ في دالة المعولية الضبابية في الصيغة (28) لاستخراج $\tilde{R}(t_i)$ لكل مشاهدة ضبابية ومن ثم استخراج التوقع لكل الـ $\tilde{R}(t_i)$ كما يأتي :

$$\tilde{R}(t) = \hat{E}(\tilde{R}(t_i)/\tilde{x}_i) = \frac{1}{K}\sum_{h=1}^{K} R^{(h)}(t) \qquad ...(29)$$

اذا ان :

K يمثل عدد مرات تكرار التجربة

h القيمة الاولية للتكرار $(Initial\ Value)$ ، بحيث ان $h = 0,1,2, \ldots..K$

- مقارنة نتائج المحاكاة : تتم مقارنة نتائج المحاكاة باستعمال المقاييس الاحصائية الاتية :
  - متوسط مربعات الخطأ $\boldsymbol{Mean\ Square\ error}$:

$$\mathrm{MSE}(\widetilde{\mathrm{R}}) = \frac{1}{\mathrm{K}}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{K}}(\widetilde{\mathrm{R}} - \mathrm{R})^2 \qquad \ldots(٣٠)$$

تمثل **K** عدد التكرارات $\boldsymbol{Replication}$ لكل تجربة .

- متوسط الخطأ النسبي المطلق$(\boldsymbol{Mean\ Absolut\ Proportional\ Error})$:

$$MAPE(\tilde{R}) = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{k}\left|\frac{\tilde{R}-R}{R}\right| \qquad \ldots(31)$$

تمثل $\mathbf{K}$ عدد التكرارات $(\boldsymbol{Replication})$ لكل تجربة.

وقد تم الحصول على نتائج المحاكاة باستعمال برنامج (Matlab 2015) وكما هو مبين في الملحق (برنامج المحاكاة) وعرضت جميع النتائج في جداول خاصة سنبينها لاحقاً.

تحليل نتائج المحاكاة: $\boldsymbol{Analysis\ of\ Simulation\ Result}$

ان الطريقة المستعملة في ايجاد تقدير للمعولية الضبابية هي طريقة بيز الضبابية $Fuzzy\ Bayes\ Method$

وسيتم عرض وتحليل نتائج تجارب المحاكاة وفق الجداول(٢) الى (٤)

جدول (٢)

يبين متوسط مربعات الخطا $\boldsymbol{MSE}$ ومتوسط مربعات الخطأ النسبي المطلق $\boldsymbol{MAPE}$ لمعلمات توزيع فريچت $\boldsymbol{\alpha}$ و $\boldsymbol{\beta}$ والمعولية الضبابية $\widetilde{\mathbf{R}}$ المقدرة بطريقة بيز عند حجوم عينات $\mathbf{n} = (\mathbf{10, 50, 100, 150, 500})$ وللقيم الحقيقية للمعولية المقابلة لكل حجم عينة (0.712,0.684,0.695,0.700, 0.702) ولقيم اولية لمعلمات توزيع فريچت $\boldsymbol{\alpha} = 0.5\ , \boldsymbol{\beta} = 0.5$

n		***Results***		
		Estimate	***MSE***	***MAPE***
10	$\hat{\alpha}$	0.614329	0.001538	0.228658
	$\hat{\beta}$	0.585701	0.000934	0.171403
	$\widetilde{R}$	0.746900	0.001419	0.491027
50	$\hat{\alpha}$	0.524356	0.000014	0.009742
	$\hat{\beta}$	0.525714	0.000016	0.010286
	$\widetilde{R}$	0.715346	0.000099	0.132370
100	$\hat{\alpha}$	0.509676	0.000001	0.001935
	$\hat{\beta}$	0.510069	0.000001	0.002014
	$\widetilde{R}$	0.698277	0.000015	0.051181
150	$\hat{\alpha}$	0.506274	0.000001	0.000837
	$\hat{\beta}$	0.504268	0.000001	0.000569
	$\widetilde{R}$	0.702000	0.000004	0.024439
500	$\hat{\alpha}$	0.502247	0.000001	0.000090
	$\hat{\beta}$	0.502485	0.000001	0.000099
	$\widetilde{R}$	0.701440	0.000001	0.012886

يتضح من الجدول (٢) وللقيم الاولية $\boldsymbol{\alpha} = 0.5\,, \boldsymbol{\beta} = 0.5$ عن طريق المقارنة بمقياس متوسط مربعات الخطأ $\boldsymbol{MSE}$ ومعيار متوسط مربعات الخطأ النسبي المطلق $\boldsymbol{MAPE}$ ان افضل قيمة تقديرية للمعولية الضبابية $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{0.701440}$ عند المعلمات $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{0.502247}$ و $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0.502485}$ المقدرة بطريقة بيز الضبابية عند مقياس متوسط مربعات الخطأ $\boldsymbol{MSE}(\tilde{\mathbf{R}}) = \mathbf{0.000001}$ ومتوسط مربعات الخطأ النسبي المطلق $\boldsymbol{MAPE}(\tilde{\mathbf{R}}) = \mathbf{0.012886}$ عند حجم عينة $\boldsymbol{n} = \mathbf{500}$ ، حيث نلحظ ان القيم التقديرية للمعلمات متوافقة مع القيم الافتراضية وكذلك المعولية الضبابية المقدرة متوافقة مع المعولية الحقيقية.

جدول (٣)

يبين متوسط مربعات الخطا $\boldsymbol{MSE}$ ومتوسط مربعات الخطأ النسبي المطلق $\boldsymbol{MAPE}$ لمعلمات توزيع فريچت $\boldsymbol{\alpha}$ و $\boldsymbol{\beta}$ والمعولية الضبابية $\tilde{\mathbf{R}}$ المقدرة بطريقة بيز عند حجوم عينات $\mathbf{n} = (\mathbf{10, 50, 100, 150, 500})$ وللقيم الحقيقية للمعولية المقابلة لكل حجم عينة (٠.٦٩٥، ٠.٧٠٦، ٠.٧٠٢، ٠.٧٠٠، ٠.٧٠١) ولقيم اولية لمعلمات توزيع فريچت $\boldsymbol{\alpha} = 0.5\,, \boldsymbol{\beta} = 1$

n	***Results***			
		Estimate	***MSE***	***MAPE***
10	$\hat{\alpha}$	0.581383	0.000875	0.162766
	$\hat{\beta}$	1.124961	0.001814	0.124961
	$\tilde{R}$	0.717208	0.000569	0.320202
50	$\hat{\alpha}$	0.522001	0.000012	0.008800
	$\hat{\beta}$	1.017313	0.000008	0.003463
	$\tilde{R}$	0.709575	0.000019	0.055026
100	$\hat{\alpha}$	0.511398	0.000002	0.002280
	$\hat{\beta}$	1.007785	0.000001	0.000778
	$\tilde{R}$	0.703406	0.000006	0.028394
150	$\hat{\alpha}$	0.504592	0.00000١	0.000459
	$\hat{\beta}$	1.005559	0.00000١	0.000278
	$\tilde{R}$	0.700917	0.000004	0.016393
500	$\hat{\alpha}$	0.502093	0.000001	0.000084
	$\hat{\beta}$	1.001977	0.000001	0.000040
	$\tilde{R}$	0.702256	0.00000٣	0.006456

يتضح من الجدول (٣) وللقيم الاولية $\boldsymbol{\alpha} = 0.5\,, \boldsymbol{\beta} = 1$ عن طريق المقارنة بمقياس متوسط مربعات الخطأ $\boldsymbol{MSE}$ ومعيار متوسط مربعات الخطأ النسبي المطلق $\boldsymbol{MAPE}$ ان افضل قيمة تقديرية للمعولية الضبابية $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{0.702256}$ عند المعلمات $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{0.502093}$ و $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{1.001977}$ المقدرة بطريقة بيز الضبابية عند مقياس متوسط مربعات الخطأ $\boldsymbol{MSE}(\tilde{\mathbf{R}}) = \mathbf{0.000003}$ ومتوسط مربعات الخطأ النسبي المطلق $\boldsymbol{MAPE}(\tilde{\mathbf{R}}) = \mathbf{0.006456}$ عند حجم عينة $\boldsymbol{n} = \mathbf{500}$ ، حيث نلحظ ان القيم التقديرية للمعلمات متوافقة جدا مع القيم الافتراضية وكذلك المعولية الضبابية المقدرة متوافقة جداً مع المعولية الحقيقية.

جدول (٤)

يبين متوسط مربعات الخطا $\boldsymbol{MSE}$ ومتوسط مربعات الخطأ النسبي المطلق $\boldsymbol{MAPE}$ لمعلمات توزيع فريچت $\boldsymbol{\alpha}$ و $\boldsymbol{\beta}$ والمعولية الضبابية $\tilde{\mathbf{R}}$ المقدرة بطريقة بيز عند حجوم عينات $\mathbf{n} = (\mathbf{10, 50, 100, 150, 500})$ وللقيم الحقيقية للمعولية المقابلة لكل حجم عينة (٠.٧٢٥، ٠.٧٠٥، ٠.٧٠١، ٠.٧٠٥، ٠.٧٠٠) ولقيم اولية لمعلمات توزيع فريچت $\boldsymbol{\alpha} = 3\,, \boldsymbol{\beta} = 1.5$

n	Results			
		Estimate	*MSE*	*MAPE*
10	$\hat{\alpha}$	3.095548	0.001224	0.031849
	$\hat{\beta}$	1.623461	0.001840	0.082307
	$\tilde{R}$	0.796005	0.005925	0.983956
50	$\hat{\alpha}$	3.023659	0.000013	0.001577
	$\hat{\beta}$	1.510309	0.000004	0.001375
	$\tilde{R}$	0.711638	0.000072	0.093132
100	$\hat{\alpha}$	3.009104	0.000001	0.000303
	$\hat{\beta}$	1.509941	0.000001	0.000663
	$\tilde{R}$	0.701200	0.000050	0.089098
150	$\hat{\alpha}$	3.006873	0.00000١	0.000153
	$\hat{\beta}$	1.507026	0.00000١	0.000312
	$\tilde{R}$	0.704613	0.000025	0.061347
500	$\hat{\alpha}$	3.001673	0.00000١	0.000011
	$\hat{\beta}$	1.502008	0.00000١	0.000027
	$\tilde{R}$	0.702224	0.000002	0.017729

يتضح من الجدول (٤) وللقيم الاولية $\alpha = 3\ , \beta = 1.5$ عن طريق المقارنة بمقياس متوسط مربعات الخطأ MSE ومعيار متوسط مربعات الخطأ النسبي المطلق $MAPE$ ان افضل قيمة تقديرية للمعولية الضبابية $\tilde{R} = 0.702224$ عند المعلمات $\hat{\alpha} = 3.001673$ و $\hat{\beta} = 1.502008$ المقدرة بطريقة بيز الضبابية عند مقياس متوسط مربعات الخطأ $MSE(\tilde{R}) = 0.000002$ ومتوسط مربعات الخــطأ النسبي المطلق $MAPE(\tilde{R}) = 0.017729$ عند حجم عينة $n = 500$ ، حيث نلحظ ان القيم التقديرية للمعلمات متوافقة مع القيم الافتراضية وكذلك المعولية الضبابية المقدرة متوافقةً مع المعولية الحقيقية.

ونلحظ انه في كل تجارب المحاكاة الثلاثة ان القيم التقديرية لمعلمات توزيع فريچت $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ المقدرة بطريقة بيز الضبابية متوافقة مع القيم الافتراضية وكذلك المعولية الضبابية $\tilde{R}$ المقدرة عند المعلمات المقدرة بطريقة بيز متوافقة جداً مع القيمة الحقيقة للمعولية وذلك دليل على صحة القيم الافتراضية.

الاستنتاجات: *Conclusions*

١- ان قيمة المعولية الضبابية المقدرة بطريقة بيز افضل من قيمة المعولية الحقيقية.
٢- كلما زاد حجم العينة فان متوسط مربعات الخطأ ومتوسط مربعات الخطأ النسبي المطلق يتناقص حتى يصل الى اقل ما يمكن عن حجم العينة $n = 500$
٣- ان قيمة المعولية الضبابية المقدرة بحسب طريقة بيز تتقارب مع القيمة الحقيقية للمعلوية كلما زاد حجم العينة.

التوصيات: *Recommendations*

في ضوء ما توصل اليه الباحثان في هذا البحث من استنتاجات نوصي بالاتي:

١. لوجود الكثير من الظواهر في العالم المادي الحقيقي تمتلك عدم الدقة لذلك نوصي بالتوسع باستعمال المنطق الضبابي لانه يعد كحل لمشكلة عدم الدقة في القياسات ويعطي نتائج ادق فيما لو كانت البيانات ضبابية.
٢. استعمال تقريب ***Tierney and Kandane's approximation T&k*** في طريقة بيز للتقدير لانه يعطي نتائج دقيقة للمعلمات وللمعولية.
٣. التوسع في استعمال طرائق اخرى للتقدير مثل طريقة العزوم الكمية الخطية **LQ – Moment** وطريقة المربعات الصغرى ***Least square method*** وطريقة المقدرات

التجزيئية $\boldsymbol{Method\ of\ Percentiles\ Estimators}$ وطرائق اخرى في ايجاد تقديرات لمعلمات التوزيع الاحتمالي في حالة كون بيانات الحياة ضبابية.

٤. استعمال طرائق التقدير الضبابية في توزيع ازمنة حياة اخرى غير توزيع فريچت الاحتمالي.

٥. الاعتماد على مؤشرات اخرى لتقليل او تخفيض حالة عدم الدقة مثل مقياس $\boldsymbol{Renyi\ entropy}$ او $\boldsymbol{Shann\ entropy}$ وغيرها.

المصادر $\boldsymbol{References}$

1 A. Ibrahim, Nathier & A. Mohammed, Hussein, (2017), "*Parameters and Reliability Estimation for the Fuzzy Exponential Distribution*", American Journal of Mathematics and Statistics, 7(4): 143-151

2 Abbas, Kamran & Yincai, Tang, (2012), "*Comparison of Estimation Methods for Frechet Distribution with Known Shape*", Caspian Journal of Applied Sciences Research, 1(10), pp. 58-64, ISSN: 2251-9114, CJASR

3 Al-nasser.Abdul majeed hamza, (2009),"*An introduction to statistical reliability*", Ithraa publishing and distribution

4 Buckley, James J., (2006), "*Fuzzy Probability and Statistics*", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, pp. 1-49

5 Chen, Guanrong; Tat, Trung, (2000), "*Introduction to Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Control Systems*", Boca Raton London New York Washington, D.C.CRC Press

6 Denoeux, Thierry, (2011), "*Maximum likelihood estimation from fuzzy data using the EM algorithm*", Fuzzy Sets and Systems, 183, pp. 72–91

7 *Felipe R. S. de Gusmão ; Edwin M. M. Ortega ; Gauss M. Cordeiro, (2011), " The generalized inverse Weibull distribution" , Stat Papers (Springer 2011 52, pp. 591–619*

8 *Harish Garg, S.P. Sharma and Monica Rani, (2013)," Weibull fuzzy probability distribution for analyzing the behaviour of pulping unit in a paper industry" . Int. J. Industrial and Systems Engineering, Vol. 14, No. 4 , pp 395-413*

9 Huang , Hong-Zhong; Zuo Ming J.; and Sun Zhan-Quan, (2006), "*Bayesian reliability analysis for fuzzy lifetime data*", Fuzzy Sets and Systems 157, 1674 – 1686

10 *Kwang H. Lee, (2004) , " First Course on Fuzzy Theory and Applications" , ISSN 16-15-3871, ISBN 3-540-22988-4 Springer ,Berlin Heidelberg NewYork, ppt:1-20*

11 *M. SHUAIB KHAN; PASHA G.R; AHMED HESHAM PASHA, (2008), "Theoretical Analysis of Inverse Weibull Distribution", WSEAS TRANSACTIONS on MATHEMATICS, Issue 2, Volume 7, pp. 30-38*

12 Pak ,Abbas *; (2016),"* Inference for the Shape Parameter of Lognormal Distribution in Presence of Fuzzy Data " Pak.j.stat.oper.res. Vol.XII No.1, pp. 89-99

13 Pak ,Abbas ; (2017)," Statistical inference for the parameter of Lindley distribution based on fuzzy data" Brazilian Journal of Probability and Statistics, Vol. 31, No. 3, 502–515

14 Pak, Abbas; Ali, Gholam & Saraj, Mansour, (2013), "*Inference for the Weibull Distribution Based on Fuzzy Data*", Int J Syst Assur Eng Manag, vol.: 36, no. 2, pp. 339 - 358

15 Pak, Abbas; Ali, Gholam & Saraj, Mansour, (2013), "*Reliability estimation in Rayleigh distribution based on fuzzy lifetime data*", Int J Syst Assur Eng Manag, springer , DOI 10.1007/s13198-013-0190-5

16 *Peter ter Berg, (2009) , " Unification of Frechet and Weibull Distribution " , DNB Working Paper, No.198/pp. 1-13*
17 *Tao ,Terence ,(2011), "An Introduction to Measure Theory", the American Mathematical Society (AMS), pp. 77-89*
18 *Torabi, H. & Mirhosseini S. M., (2009), " The Most Powerful Tests for Fuzzy Hypotheses Testing with Vague Data" , Applied Mathematical Sciences, Vol. 3, 2009, no. 33,pp. 1619 – 1633*
19 Wu, Hsien-Chung, (2004), "*Fuzzy reliability estimation using Bayesian approach*", Computers & Industrial Engineering, 46, pp. 467–493
20 *Zadeh L. A. (1972),"A Fuzzy-Set-Theoretic Interpretation of Linguistic Hedges" , Journal of Cybernetics, 2:3, 4-34.*
21 *Zadeh L. A. (1975), " The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approxirqate Reasoning-III*", NFORMATIONSCIENCES9, 43-80.*
22 Zadeh, L. A., (1965), ''*Fuzzy Sets*'', Information and control, Department of Electrical Engineering and Electronics Research Laboratory, University of California, Berkeley ,California ,8, 338-353
23 Zadeh, L. A., (1968), ''*Fuzzy Algorithms*'', Information and control, 12, 94-102
24 Zadeh, L., A., (1968), ''*Probability Measures of Fuzzy Events", Journal of Mathematical analysis and applications 23, 421-428.*