معولية نظام *cascade* للإجهاد والمتانة لتوزيع معكوس لندلي

Reliability of the cascade system for Stress-Strength System For the Inverse Lindley distribution

الباحث:سناء علي محمد العبودي　　أ.م.د مهدي وهاب نعمة نصر الله

Sanaa.aliy90@gmail.com　　mahdi_na2002@yahoo.com

الملخص:

تضمن الجانب النظري من هذا البحث على اشتقاق الصيغة الرياضية لنظام Cascade لاكثر من مكونه تمتلك متانه (x) وتتعرض لجهد مستقل (Y_1) مع وجود عامل التوهين (k) والذي يعمل على تصحيح مسار هذا النظام والعمل به بصورة صحيحة , وقد تم التوصل الى دالة المعوليه لنظام Cascade (R_3, R_2) بالاعتماد على الصيغة الرياضية المشتقة لتوزيع معكوس لندلي . كذلك تم التوصل إلى أن معولية النظام R_3 تزداد عن طريق زيادة قيمة معلمة المتانة بينما عند زيادة قيمة معلمة الإجهاد فأن معولية النظام R_3 تتناقص .

Abstract

The theoretical part of this thesis involves the derivation of the mathematical formula of the cascade system for more than one component that has the strength (x) and getting independent stress (Y_1) with an attenuation factor (k) which works to recertification the path of this system and make it works in the reliability function of the Cascade system right way. Also, this work reached (R_3, R_2) depending on the derivative mathematical formula of the inverse Lindley distribution. Moreover, it was concluded that the reliability of R_3 is increasing by increase the value of the strength parameter, while R_3 is .decreasing by increase the value of the stress parameter

منهجية البحث

1-1 المقدمة Introduction

تعرف معولية نظام cascade على أنها احتمال أن المتانة أكبر من الإجهاد , هو نوع خاص من نظام (standby) . ويعرف نظام n– cascade ايضا بنظام التكرار الاحتياطي الهرمي

(a hierarchical standby redundancy system) اذ ان مجموعة المكونات تكون مرتبة حسب التنشيط ,إذ أن المكون الاول نشط اما المكونات المتبقية فتكون في وضع الاستعداد (standby) , فعند فشل المكون الاول في تحمل الاجهاد المفروض علية يتم تنشيط المكون الثاني في وضع الاستعداد لمواجهة الاجهاد الموجة الية ,اذ يتم تخفيف الاجهاد في المكون الثاني وذلك عن طريق عامل التوهين (Attenuation factor) ,ويرمز له بالرمز(k) اذ يقدم هذ لعامل تحسين على الاجهاد المفروض على المكون الثاني وذلك عن طريق تحسين الاجهاد للمكون اللاحق عن طريق اضعاف الاجهاد على المكون السابق الفاشل. يتم تشكيل الانموذج الاحصائي لدراسة معولية نظام cascade وذلك بفرض ان جميع المكونات مستقلة وتتبع توزيع معكوس لندلي Inverse Lindley distribution , يتألف النظام من عدد n من المكونات إذ أن $n = 2,3$. كل مكون يعمل تحت تأثير متانة معينة . ويتم ايجاد المعولية الحدية لكل من R(1),R(2),R(3) ومن ثم ايجاد معولية النظام R_3 .

2-1 هدف من البحث The Aims of thesis

يرمي هذا البحث الى ايجاد صيغة رياضية لمعوليه نظام cascade لمنظومة تشغيلية تعتمد على متغيري المتانة لمكونات المنظومة والاجهاد المسلط على هذه المنظومة عندما $n = 3$ وذلك بأستعمال توزيع معكوس لندلي Inverse Lindley distribution , ومن ثم دراسة سلوك المعولية لـ R_2 و R_3 .

1-3 مشكلة البحث :

عند العمال في نظام ما للإجهاد والمتانة فأن فشل احدى مكونات النظام يؤدي الى فشل النظام بأكمله وتوقف عن العمل اما في نظام cascade للإجهاد والمتانة فأن فشل احدى المكونات لا يؤدي الى فشل النظام عن العمل بل سوفة يقوم النظام بتحسين على الإجهاد وذلك عن طريق عامل التوهين لكي يستمر النظام في العمل .

2 – الجانب النظري

يتضمن هذا الجانب اشتقاق الصيغة الرياضية لمعولية نظام cascade لمتغيري الاجهاد stress والمتانة strength التي تتبع توزيع معكوس لندلي Inverse Lindley distribution, ومن ثم ايجاد تقديردالة معولية نظام cascade للمتانة والاجهاد اذ نعد المتانة والاجهاد متغرات تتبع توزيع معكوس لندلي مع معلمة شكل مختلفة , بأستعمال طريقة الامكان الاعظم .

2-2 نظام cascade الإجهاد – المتانة[3],[4],[5],[6]

يعرف نظام(cascade) على انه نوع خاص من نظام الانتظار الاحتياطي (standby redundancy) لنماذج الإجهاد والمتانة . إذ أن نظام (standby redundancy) هوعبارة عن اسلوب لزيادة معولية النظام , اذ يفترض هذا النظام ان المكون الاحتياطي الذي يكون في حالة استعداد يأخذ مكان المكون الذي فشل ويعمل في بيئة العمل نفسها ويتعرض المكون الاحتياطي لاجهاد ليس بالضرورة ان يكون مشابه للإجهاد الذي تعرض له المكون الذي فشل في استمرارية العمل . وتشكيل الانموذج الاحصائي لدراسة معولية نظام n– cascade وذلك بفرض ان جميع المكونات مستقلة وتتبع توزيع معكوس لندلي يتألف النظام من عدد n من المكونات إذ أن $n = 2,3$. كل مكون يعمل تحت تأثير متانة(strength) معينة . واي مكون سوف يعمل طالما الاجهاد(stress) المفروض علية اقل من المتانة (strength).. إذ يوضح إنموذج الإجهاد– المتانة بشكل عام طبيعة العلاقة بين متغيرين عشوائيين أحدهما يمثل الإجهاد والاخر يمثل المتانة , ويتلخص هذه المفهوم في تقدير أو إيجاد إحتمال ان يتجاوز أحد المتغيرين المتغير الاخر. متانة المكون هو الحد الادنى من الاجهاد اللازم لتسبب في فشل المكون , اذا كان الاجهاد اكبر من متانة المكون فأن المكون يفشل , اما اذا كان الاجهاد اقل من متانة المكون فأن المكون يستمر في العمل . في نظام التتابع بعد كل فشل يتم تعديل الإجهاد لدى عامل (k) , اي قيمة الاجهاد تساوي k هو ثابت صحيح يتغير من مكون الى اخر يعرف بعامل التوهين (attenuation factor) , وهذا العامل هو السبب في جعل نظام cascade حالة خاصة من نظام standby لانه يقدم عامل تحسين للمكون اللاحق عن طريق اضعاف الاجهاد على المكون السابق الفاشل علما ان $k_1 = 1$ بشكل عام :

$$\text{etc}Y_2 = KY_1 , Y_3 = KY_2 = K^2Y_1 \dots Y_i = K^{i-1}Y_1$$

3-2 الانموذج الرياضي العام [2],[7] General Malthematical Model

نفرض ان X متغير عشوائي يمثل متانة المكونات ومتغير عشوائي اخر Y يمثل الاجهاد للمكونات , اذا معولية المكونات تكون كما في الصيغة الاتية :

$$\mathrm{R} = \Pr(X > Y)$$

$$= \int_{y=0}^{\infty} \left(\int_{x=y}^{\infty} f(x)dx \ \right) g(y)dy \qquad \dots (2.1)$$

و نفرض ان $x_1, x_2, \dots, x_n$ تمثل متانة المكون لـ $C_1, C_2, \dots, C_n$ مرتبة حسب التنشيط .تتوزع المتغيرات العشوائية X_i بشكل مستقل مع دالة كثافة احتمالية $f_i(X_i)$ إذ أن $i = 1,2, \dots$ وكذلك نفرض Y_i يمثل الاجهاد على المكونات وهو متغيرعشوائي مع دالة كثافة احتمالية $g(y_1)$. اذا كان ($x_1 > y_1$) فأن المكون الاول C_1 يعمل والنظام يعمل, واذا كان ($x_1 < y_1$) يؤدي الى فشل المكون C_1 ثم المكون الثاني C_2 يأخذ مكانه مع متانة x_2 على الرغم من ان النظام عانى من فقدان مكون واحد فإنه يبقى يعمل أذا ($y_1 < x_2$).

ان الصيغة الرياضية لمعولية نظام cascade هي :

$$R_n = R(1) + R(2) + \cdots + R(n) \qquad \dots(2.2)$$

وتعطى الدالة الحدية لمعولية R(n) وهو نظام المعولية للمكون n^{th} كالاتي :

$$R(n) = P\left[\left\{\bigcap_{i=1}^{n-1}(X_i \le Y_i)\right\}\bigcap(X_n \ge Y_n)\right] \qquad \dots(2.3)$$

$$= P[X_1 \le K_1^* Y_1, X_2 \le K_2^* Y_1, \dots, X_{n-1} \le K_{n-1}^* Y_1, X_n > K_n^* Y] \qquad \dots(2.4)$$

$$= \int_0^\infty [\int_0^{K_1^* Y_1} f_1(x_1)dx_1 \int_0^{K_2^* Y_1} f_2(x_2)dx_2 \dots \int_0^{K_{n-1}^* Y_1} f_{n-1}(x_{n-1})dx_{n-1} \int_{K_n^* Y}^\infty f_n\ (x_n)dx_n\ ]\ g(y_1)dy \qquad \dots(2.5)$$

$$= \int_0^\infty [F_1(K_1^* Y_1)F_2(K_2^* Y_1) \dots F_{n-1}(K_{n-1}^* Y_1)\bar{F}_n(K_n^* Y)]\ g(y_1)dy \qquad \dots(2.6)$$

أذ إن :

$$F_i(K_i^* Y_1) = \int_0^{K_i^* Y_1} f_i(x_i)dx_i$$

$$\bar{F}_i(K_i^* Y_1) = 1 - F_i(K_i^* Y_1) \qquad \dots(2.7)$$

وعلية تكون معولية نظام n– cascade هي مجموع حاصل جمع المعوليات $R(i)$

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} R(i) \qquad \dots(2.8)$$

ويمكن من الصيغة آنفا حساب معولية نظام n– cascade لأي توزيع معين .

2–4 توزيع معكوس لندالي [1] Inverse Lindley distribution

ان توزيع لندلي هو عباره عن مزيج من التويع الاسي وتوزيع كاما سوف نستعمل توزيع معكوس لندالي اذا كانت y تتوزع لندالي فأن $x = \frac{1}{y}$ تتوزع معكوس لندالي مع معلمة قياس (θ) فأن دالة كثافته الاحتمالية pdf (probability density function) تعطى كما يأتي:

$$f(x) = \frac{\theta^2}{1+\theta}\left[\frac{1+x}{x^3}\right]e^{-\theta/x} \qquad x > 0\ \ ,\theta > 0$$

وأن دالة التوزيع التراكمي CDF (Cumulative distribution function) تعطى بالصيغة الاتية :

$$F(x) = \left[1 + \frac{\theta}{x(1+\theta)}\right]e^{-\theta/x} \qquad x > 0\ \ ,\theta > 0$$

5-2 معولية نظام cascade على اساس توزيع معكوس لندالي

The Reliability of cascade system based on Inverse Lindley distribution

عندما يتبع الاجهاد والمتانة توزيع معكوس لندلي يمكننا الحصول على معولية نظام cascade بفرض ان المتغير العشوائي X_i وان $i = 1,2, \dots, n$ يمثل المتانة(strength) وانه يتبع توزيع معكوس لندليInverse Lindley ذي معلمة الشكل (α) و ونفرض متغير عشوائي اخر Y_1 يمثل الاجهاد(stress) يتبع توزيع معكوس لندليInverse Lindley ذي المعلمة (β) .

فأن دالة كثافته الاحتمالية pdf (probability density function) تعطى على التوالي كما يأتي :

$$f(x_i) = \frac{\alpha_i^2}{1+\alpha_i}\left[\frac{1+x_i}{{x_i}^3}\right]e^{-\alpha_i/x_i} \quad , \quad x_i > 0 \quad \dots (2.9)$$

$$g(y_1) = \frac{\beta^2}{1+\beta}\left[\frac{1+y_1}{{y_1}^3}\right]e^{-\beta/y_1} \quad \dots (2.10)$$

وأن دالة التوزيع التراكمي CDF (Cumulative distribution function) تعطى على التوالي بالصيغة الاتية

$$F(x_i) = \left[1+\frac{\alpha}{x_i(1+\alpha)}\right]e^{-\alpha/x_i} \quad \dots (2.11)$$

$$G(y_1) = \left[1+\frac{\beta}{y_1(1+\beta)}\right]e^{-\beta/y_1} \quad , \quad x > 0 \quad \dots (2.12)$$

لأجل ايجاد معولية النظام R_n عندما $n = 2,3$ يتم ذلك عن طريق الصيغة (2.8) ويتم الحصول على $F_1(y_1)$ كما يأتي :

$$F_1(y_1) = \left[1+\frac{\alpha_1}{y_1(1+\alpha_1)}\right]e^{-\alpha_1/y_1} \quad \dots (2.13)$$

يتم الحصول على معولية نظام cascade عن طريق المعولية الحدية Marginal reliability للمكونات , اذ :

عندما $r = 1$ يتم الحصول على المعولية الحدية الاولى كما يأتي:

$$R(1) = P(x_1 > y) \quad \dots (2.14)$$

$$= \int_0^\infty \left[\int_{y_1}^\infty f_1(x_1)dx_1\right] g(y_1)dy_1$$

$$= \int_0^\infty \bar{F}_1(y_1)\, g(y_1)\, dy_1$$

$$= \int_0^\infty [1 - F_1(y_1)]\, g(y_1)\, dy_1$$

$$= \int_0^\infty \left[1 - \left[1+\frac{\alpha_1}{y_1(1+\alpha_1)}\right]e^{-\alpha_1/y_1}\right] \frac{\beta^2}{1+\beta}\left[\frac{1+y_1}{{y_1}^3}\right]e^{-\beta/y_1}\, dy_1$$

$$= \int_0^\infty \frac{\beta^2}{1+\beta}\left[\frac{1+y_1}{{y_1}^3}\right]e^{-\beta/y_1}\, dy_1 - \int_0^\infty \frac{\beta^2}{1+\beta}\left[\frac{1+y_1}{{y_1}^3}\right]e^{-(\alpha_1+\beta)/y_1}\, dy_1$$

$$-\int_0^\infty \frac{\alpha_1\,\beta^2}{y_1(1+\alpha_1)(1+\beta)}\left[\frac{1+y_1}{y_1^3}\right]\, e^{-(\alpha_1+\beta)/y_1}\,\mathrm{d}y_1$$

$$= 1-\frac{\beta^2}{1+\beta}\left[\int_0^\infty y^{-3}\, e^{-(\alpha_1+\beta)/y_1}\ dy_1+\int_0^\infty y^{-2}\, e^{-(\alpha_1+\beta)/y_1}\ dy_1\right]$$

$$-\frac{\alpha_1\,\beta^2}{(1+\alpha_1)(1+\beta)}\left[\int_0^\infty y^{-4}\, e^{-(\alpha_1+\beta)/y_1}\ dy_1+\int_0^\infty y^{-3}\, e^{-(\alpha_1+\beta)/y_1}\ dy_1\right]$$

باستخدام توزيع مكوس لندلي وتوزيع معكوس كاما ، نحصل على تعبير المعولية لاجهاد والمتانة

$$= 1-\frac{\beta^2}{1+\beta}\ \left[\frac{\Gamma 2}{(\alpha_1+\beta)^2}+\frac{\Gamma 1}{(\alpha_1+\beta)}\right]-\frac{\alpha_1\,\beta^2}{(1+\alpha_1)(1+\beta)}\ \left[\frac{\Gamma 3}{(\alpha_1+\beta)^3}+\frac{\Gamma 2}{(\alpha_1+\beta)^2}\right]$$

$$R(1)=1-\frac{\beta^2(1+\alpha_1+\beta)}{(1+\beta)(\alpha_1+\beta)^2}-\frac{\alpha_1\,\beta^2(2+\alpha_1+\beta)}{(1+\alpha_1)(1+\beta)(\alpha_1+\beta)^3} \qquad \dots(2.15)$$

وعندما $r=2$ يتم الحصول على المعولية الحدية الثانية كما يأتي:

$$\mathrm{R}(2)=P[x_1<y_1\,, x_2\geq y_1] \qquad \dots(2.16)$$

$$=\int_0^\infty\left[\int_0^{y_1} f_1(x_1)dx_1\right]\left[\int_{ky_1}^\infty f_2(x_2)dx_2\right]\, g(y_1)dy_1$$

$$=\int_0^\infty F_1(y_1)\,\bar{F}_2(ky_1)\, g(y_1)dy_1$$

$$=\int_0^\infty F_1(y_1)\,[1-F_2(ky_1)]\ \ g(y_1)dy_1$$

إذ أن

$$F_2(ky_1)=\left[1+\frac{\alpha_2}{ky_1(1+\alpha_2)}\right]e^{-\alpha_2/ky_1}$$

$$R(2)=\int_0^\infty\left[1+\frac{\alpha_1}{y_1(1+\alpha_1)}\right]e^{-\alpha_1/y_1}\ \ \left[1-(1+\frac{\alpha_2}{ky_1(1+\alpha_2)})e^{-\alpha_2/ky_1}\right]$$

$$\left[\frac{\beta^2}{1+\beta}\left(\frac{1+\mathrm{y}_1}{{y_1}^3}\right)e^{-\beta/y_1}\right]\ dy_1$$

$$= \int_0^{\infty} \Bigg[\frac{\beta^2}{1+\beta}\left(\frac{1+y_1}{{y_1}^3}\right)e^{-(\alpha_1+\beta)/y_1} - \frac{\beta^2}{1+\beta}\left(\frac{1+y_1}{{y_1}^3}\right)e^{-(k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)/ky_1}$$
$$- \frac{\alpha_2\,\beta^2}{k(1+\alpha_2)(1+\beta)}\left(\frac{1+y_1}{{y_1}^4}\right)e^{-(k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)/ky_1}$$
$$+ \frac{\alpha_1\,\beta^2}{(1+\alpha_1)(1+\beta)}\left(\frac{1+y_1}{{y_1}^4}\right)e^{-(\alpha_1+\beta)/y_1}$$
$$- \frac{\alpha_1\,\beta^2}{(1+\alpha_1)(1+\beta)}\left(\frac{1+y_1}{{y_1}^4}\right)e^{-(k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)/ky_1}$$
$$- \frac{\alpha_1\alpha_2\,\beta^2}{k(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\beta)}\left(\frac{1+y_1}{{y_1}^5}\right)e^{-(k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)/ky_1}\Bigg]\,dy_1$$

$$= \frac{\beta^2}{1+\beta}\left[\int_0^{\infty} y^{-3}\,e^{-(\alpha_1+\beta)/y_1}\,dy_1 + \int_0^{\infty} y^{-2}\,e^{-(\alpha_1+\beta)/y_1}\,dy_1\right]$$
$$- \frac{\beta^2}{1+\beta}\left[\int_0^{\infty} y^{-3}e^{-(k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)/ky_1}\,dy_1 + \int_0^{\infty} y^{-2}e^{-(k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)/ky_1}\,dy_1\right]$$
$$- \frac{\alpha_2\,\beta^2}{k(1+\alpha_2)(1+\beta)}\left[\int_0^{\infty} y^{-4}e^{-(k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)/ky_1}\,dy_1 + \int_0^{\infty} y^{-3}e^{-(k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)/ky_1}\,dy_1\right]$$
$$+ \frac{\alpha_1\,\beta^2}{(1+\alpha_1)(1+\beta)}\left[\int_0^{\infty} y^{-4}\,e^{-(\alpha_1+\beta)/y_1}\,dy_1 + \int_0^{\infty} y^{-3}\,e^{-(\alpha_1+\beta)/y_1}\,dy_1\right]$$
$$- \frac{\alpha_1\,\beta^2}{(1+\alpha_1)(1+\beta)}\left[\int_0^{\infty} y^{-4}e^{-(k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)/ky_1}\,dy_1 + \int_0^{\infty} y^{-3}e^{-(k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)/ky_1}\,dy_1\right]$$
$$- \frac{\alpha_1\alpha_2\,\beta^2}{k(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\beta)}\Bigg[\int_0^{\infty} y^{-5}e^{-(k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)/ky_1}\,dy_1$$
$$+ \int_0^{\infty} y^{-4}e^{-(k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)/ky_1}\,dy_1\Bigg]$$

باستخدام توزيع معكوس كاما ،يتم الحصول على تعبير المعولية لاجهاد والمتانة

$$= \frac{\beta^2}{1+\beta}\left[\frac{\Gamma 2}{(\alpha_1+\beta)^2} + \frac{\Gamma 1}{(\alpha_1+\beta)}\right] - \frac{\beta^2}{1+\beta}\left[\frac{\Gamma 2}{\left(\frac{k\alpha_1+\alpha_2+k\beta}{k}\right)^2} + \frac{\Gamma 1}{\left(\frac{k\alpha_1+\alpha_2+k\beta}{k}\right)}\right]$$
$$- \frac{\alpha_2\,\beta^2}{k(1+\alpha_2)(1+\beta)}\left[\frac{\Gamma 3}{\left(\frac{k\alpha_1+\alpha_2+k\beta}{k}\right)^3} + \frac{\Gamma 2}{\left(\frac{k\alpha_1+\alpha_2+k\beta}{k}\right)^2}\right]$$
$$+ \frac{\alpha_1\,\beta^2}{(1+\alpha_1)(1+\beta)}\left[\frac{\Gamma 3}{(\alpha_1+\beta)^3} + \frac{\Gamma 2}{(\alpha_1+\beta)^2}\right]$$

$$-\frac{\alpha_1\,\beta^2}{(1+\alpha_1)(1+\beta)}\left[\frac{\Gamma 3}{\left(\frac{k\alpha_1+\alpha_2+k\beta}{k}\right)^3}+\frac{\Gamma 2}{\left(\frac{k\alpha_1+\alpha_2+k\beta}{k}\right)^2}\right]$$

$$-\frac{\alpha_1\alpha_2\,\beta^2}{k(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\beta)}\left[\frac{\Gamma 4}{\left(\frac{k\alpha_1+\alpha_2+k\beta}{k}\right)^4}+\frac{\Gamma 3}{\left(\frac{k\alpha_1+\alpha_2+k\beta}{k}\right)^3}\right]$$

$$R(2)=\frac{\beta^2(1+\alpha_1+\beta)}{(1+\beta)(\alpha_1+\beta)^2}-\frac{\beta^2\,k(k+k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)}{(1+\beta)(k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)^2}$$
$$-\frac{\alpha_2\,\beta^2 k(2k+k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)}{(1+\alpha_2)(1+\beta)(k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)^3}+\frac{\alpha_1\,\beta^2(2+\alpha_1+\beta)}{(1+\alpha_1)(1+\beta)(\alpha_1+\beta)^3}$$
$$-\frac{\alpha_1\,\beta^2\,k^2(2k+k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)}{(1+\alpha_1)(1+\beta)(k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)^3}$$
$$-\frac{\alpha_1\alpha_2\,\beta^2 k^2(6k+2k\alpha_1+2\alpha_2+2k\beta)}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\beta)(k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)^4} \qquad \dots(2.17)$$

وعندما $r=3$ يمكن الحصول على المعولية الحدية كما يأتي:

$$\mathrm{R}(3)=P[x_1<y_1\,,x_2<ky_1\,,x_3\geq k^2y_1] \qquad \dots(2.18)$$

$$=\int_0^\infty\left[\int_0^{y_1}f_1(x_1)dx_1\right]\left[\int_0^{ky_1}f_2(x_2)dx_2\right]\left[\int_{ky_1}^\infty f_3(3)dx_3\right]g(y_1)dy_1$$

$$\mathrm{R}(3)=\int_0^\infty F_1(y_1)\,F_2(ky_1)\bar{F}_3(k^2y_1)\,g(y_1)dy_1$$

$$=\int_0^\infty F_1(y_1)F_2(ky_1)\,[1-F_3(k^2y_1)]\;g(y_1)dy_1$$

إذ أن

$$F_2(k^2y_1)=\left[1+\frac{\alpha_3}{k^2y_1(1+\alpha_3)}\right]e^{-\alpha_3/k^2y_1}$$

$$R(3)=\int_0^\infty\left[(1+\frac{\alpha_1}{y_1(1+\alpha_1)})e^{-\alpha_1/y_1}\right]\left[(1+\frac{\alpha_2}{ky_1(1+\alpha_2)})e^{-\alpha_2/ky_1}\right]$$

$$\left[1-\left(1+\frac{\alpha_3}{k^2y_1(1+\alpha_3)}\right)e^{-\alpha_3/k^2y_1}\right]\left[\frac{\beta^2}{1+\beta}\left(\frac{1+\mathrm{y}_1}{{y_1}^3}\right)e^{-\beta/y_1}\right]\;dy_1$$

$$=\int_0^\infty[\;\frac{\beta^2}{1+\beta}\left(\frac{1+\mathrm{y}_1}{{y_1}^3}\right)e^{-(k\alpha_1+\alpha_2+\beta k)/ky_1}$$

$$-\frac{\beta^2}{1+\beta}\left(\frac{1+y_1}{{y_1}^3}\right)e^{-\left(k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+\beta k^2\right)/k^2y_1}$$

$$-\frac{\alpha_3\beta^2}{k^2(1+\alpha_3)(1+\beta)}\left(\frac{1+y_1}{{y_1}^4}\right)e^{-\left(k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+\beta k^2\right)/k^2y_1}$$

$$+\frac{\alpha_2\beta^2}{k(1+\alpha_2)(1+\beta)}\left(\frac{1+y_1}{{y_1}^4}\right)e^{-(k\alpha_1+\alpha_2+\beta k)/ky_1}$$

$$-\frac{\alpha_2\beta^2}{k(1+\alpha_2)(1+\beta)}\left(\frac{1+y_1}{{y_1}^4}\right)e^{-\left(k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+\beta k^2\right)/k^2y_1}$$

$$-\frac{\alpha_2\ \alpha_3\beta^2}{k^3(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)(1+\beta)}\left(\frac{1+y_1}{{y_1}^5}\right)e^{-\left(k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+\beta k^2\right)/k^2y_1}$$

$$+\frac{\alpha_1\beta^2}{(1+\alpha_1)(1+\beta)}\left(\frac{1+y_1}{{y_1}^4}\right)e^{-(k\alpha_1+\alpha_2+\beta k)/ky_1}$$

$$-\frac{\alpha_1\beta^2}{(1+\alpha_1)(1+\beta)}\left(\frac{1+y_1}{{y_1}^4}\right)e^{-\left(k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+\beta k^2\right)/k^2y_1}$$

$$-\frac{\alpha_1\ \alpha_3\beta^2}{k^2(1+\alpha_1)(1+\alpha_3)(1+\beta)}\left(\frac{1+y_1}{{y_1}^5}\right)e^{-\left(k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+\beta k^2\right)/k^2y_1}$$

$$+\frac{\alpha_1\ \alpha_2\beta^2}{k(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\beta)}\left(\frac{1+y_1}{{y_1}^5}\right)e^{-(k\alpha_1+\alpha_2+\beta k)/ky_1}$$

$$-\frac{\alpha_1\alpha_2\ \beta^2}{k(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\beta)}\left(\frac{1+y_1}{{y_1}^5}\right)e^{-\left(k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+\beta k^2\right)/k^2y_1}$$
$$-\frac{\alpha_1\alpha_2\ \alpha_3\beta^2}{k^3(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)(1+\beta)}\left(\frac{1+y_1}{{y_1}^6}\right)e^{-\left(k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+\beta k^2\right)/k^2y_1}]dy_1$$

$$=\frac{\beta^2}{1+\beta}\left[\frac{\Gamma 2}{\left(\frac{k\alpha_1+\alpha_2+\beta k}{k}\right)^2}+\frac{\Gamma 1}{\left(\frac{k\alpha_1+\alpha_2+\beta k}{k}\right)}\right]$$

$$-\frac{\beta^2}{1+\beta}\left[\frac{\Gamma 2}{\left(\frac{k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+\beta k^2}{k^2}\right)^2}+\frac{\Gamma 1}{\left(\frac{k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+\beta k^2}{k^2}\right)}\right]$$

$$-\frac{\alpha_3\beta^2}{k^2(1+\alpha_3)(1+\beta)}\left[\frac{\Gamma 3}{\left(\frac{k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+\beta k^2}{k^2}\right)^3}+\frac{\Gamma 2}{\left(\frac{k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+\beta k^2}{k^2}\right)^2}\right]$$

$$+\frac{\alpha_2\beta^2}{k(1+\alpha_2)(1+\beta)}\left[\frac{\Gamma 3}{\left(\frac{k\alpha_1+\alpha_2+\beta k}{k}\right)^3}+\frac{\Gamma 2}{\left(\frac{k\alpha_1+\alpha_2+\beta k}{k}\right)^2}\right]$$

$$-\frac{\alpha_2\beta^2}{k(1+\alpha_2)(1+\beta)}\left[\frac{\Gamma 3}{\left(\frac{k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+\beta k^2}{k^2}\right)^3}+\frac{\Gamma 2}{\left(\frac{k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+\beta k^2}{k^2}\right)^2}\right]$$

$$-\frac{\alpha_2\,\alpha_3\beta^2}{k^3(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)(1+\beta)}\left[\frac{\Gamma 4}{\left(\frac{k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+\beta k^2}{k^2}\right)^4}+\frac{\Gamma 3}{\left(\frac{k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+\beta k^2}{k^2}\right)^3}\right]$$

$$+\frac{\alpha_1\beta^2}{(1+\alpha_1)(1+\beta)}\left[\frac{\Gamma 3}{\left(\frac{k\alpha_1+\alpha_2+\beta k}{k}\right)^3}+\frac{\Gamma 2}{\left(\frac{k\alpha_1+\alpha_2+\beta k}{k}\right)^2}\right]$$

$$-\frac{\alpha_1\beta^2}{(1+\alpha_1)(1+\beta)}\left[\frac{\Gamma 3}{\left(\frac{k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+\beta k^2}{k^2}\right)^3}+\frac{\Gamma 2}{\left(\frac{k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+\beta k^2}{k^2}\right)^2}\right]$$

$$-\frac{\alpha_1\,\alpha_3\beta^2}{k^2(1+\alpha_1)(1+\alpha_3)(1+\beta)}\left[\frac{\Gamma 4}{\left(\frac{k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+\beta k^2}{k^2}\right)^4}+\frac{\Gamma 3}{\left(\frac{k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+\beta k^2}{k^2}\right)^3}\right]$$

$$+\frac{\alpha_1\,\alpha_2\beta^2}{k(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\beta)}\left[\frac{\Gamma 4}{\left(\frac{k\alpha_1+\alpha_2+\beta k}{k}\right)^4}+\frac{\Gamma 3}{\left(\frac{k\alpha_1+\alpha_2+\beta k}{k}\right)^3}\right]$$

$$-\frac{\alpha_1\alpha_2\,\beta^2}{k(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\beta)}\left[\frac{\Gamma 4}{\left(\frac{k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+\beta k^2}{k^2}\right)^4}+\frac{\Gamma 3}{\left(\frac{k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+\beta k^2}{k^2}\right)^3}\right]$$

$$-\frac{\alpha_1\alpha_2\,\alpha_3\beta^2}{k^3(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)(1+\beta)}\left[\frac{\Gamma 5}{\left(\frac{k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+\beta k^2}{k^2}\right)^5}+\frac{\Gamma 4}{\left(\frac{k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+\beta k^2}{k^2}\right)^4}\right]$$

$$R(3)=\frac{\beta^2k(k+k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)}{(1+\beta)(k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)^2}-\frac{\beta^2k^2(k^2+k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+k^2\beta)}{(1+\beta)(k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+k^2\beta)^2}$$

$$-\frac{\alpha_3\beta^2k^2(2k^2+k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+k^2\beta)}{(1+\alpha_3)(1+\beta)(k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+k^2\beta)^3}+\frac{\alpha_2\beta^2k(2k+k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)}{(1+\alpha_2)(1+\beta)(k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)^3}$$

$$-\frac{\alpha_2\beta^2k^3(2k^2+k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+k^2\beta)}{(1+\alpha_2)(1+\beta)(k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+k^2\beta)^3}$$

$$-\frac{\alpha_2\,\alpha_3\beta^2k^3(6k^2+2k^2\alpha_1+2k\alpha_2+2\alpha_3+2k^2\beta)}{(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)(1+\beta)(k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+k^2\beta)^4}$$

$$+\frac{\alpha_1\beta^2k^2(2k+k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)}{(1+\alpha_1)(1+\beta)(k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)^3}-\frac{\alpha_1\beta^2k^4(2k^2+k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+k^2\beta)}{(1+\alpha_1)(1+\beta)(k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+k^2\beta)^3}$$

$$-\frac{\alpha_1\,\alpha_3\beta^2k^4(6k^2+2k^2\alpha_1+2k\alpha_2+2\alpha_3+2k^2\beta)}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_3)(1+\beta)(k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+k^2\beta)^4}$$

$$+\frac{\alpha_1\,\alpha_2\beta^2k^2(6k+2k\alpha_1+2\alpha_2+2k\beta)}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\beta)(k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)^4}$$

$$-\frac{\alpha_1\,\alpha_2\,\beta^2\,k^5(6k^2+2k^2\alpha_1+2k\alpha_2+2\alpha_3+2k^2\beta)}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\beta)(k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+k^2\beta)^4}$$

$$-\frac{\alpha_1\alpha_2\,\alpha_3\beta^2k^5(24k^2+6k^2\alpha_1+6k\alpha_2+6\alpha_3+6k^2\beta)}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)(1+\beta)(k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+k^2\beta)^5} \quad \dots (2.19)$$

يتم الحصول على معولية النظام R_2 عن طريق المعادلتين (2.19),(2.26) كمايأتي :

2−cascade system

$$R_2 = R(1)+R(2)$$

$$=1-\frac{\beta^2\,k(k+k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)}{(1+\beta)(k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)^2}-\frac{\alpha_2\,\beta^2k(2k+k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)}{(1+\alpha_2)(1+\beta)(k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)^3}$$

$$-\frac{\alpha_1\,\beta^2\,k^2(2k+k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)}{(1+\alpha_1)(1+\beta)(k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)^3}$$

$$-\frac{\alpha_1\alpha_2\,\beta^2k^2(6k+2k\alpha_1+2\alpha_2+2k\beta)}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\beta)(k\alpha_1+\alpha_2+k\beta)^4} \quad \dots (2.20)$$

يتم الحصول على معولية النظامR_3 عن طريق المعادلات (2.15),(2.17) ,(2.19) كمايأتي :

3−cascade system

$$R_3 = R(1)+R(2)+R(3)$$

$$=1-\frac{\beta^2k^2(k^2+k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+k^2\beta)}{(1+\beta)(k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+k^2\beta)^2}$$

$$-\frac{\alpha_3\beta^2k^2(2k^2+k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+k^2\beta)}{(1+\alpha_3)(1+\beta)(k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+k^2\beta)^3}$$

$$-\frac{\alpha_2\beta^2k^3(2k^2+k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+k^2\beta)}{(1+\alpha_2)(1+\beta)(k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+k^2\beta)^3}$$

$$-\frac{\alpha_1\beta^2k^4(2k^2+k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+k^2\beta)}{(1+\alpha_1)(1+\beta)(k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+k^2\beta)^3}$$

$$-\frac{\alpha_2\,\alpha_3\beta^2k^3(6k^2+2k^2\alpha_1+2k\alpha_2+2\alpha_3+2k^2\beta)}{(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)(1+\beta)(k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+k^2\beta)^4}$$

$$-\frac{\alpha_1\,\alpha_3\beta^2k^4(6k^2+2k^2\alpha_1+2k\alpha_2+2\alpha_3+2k^2\beta)}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_3)(1+\beta)(k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+k^2\beta)^4}$$

$$-\frac{\alpha_1\,\alpha_2\,\beta^2\,k^5(6k^2+2k^2\alpha_1+2k\alpha_2+2\alpha_3+2k^2\beta)}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\beta)(k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+k^2\beta)^4}$$

$$-\frac{\alpha_1\alpha_2\,\alpha_3\beta^2k^5(24k^2+6k^2\alpha_1+6k\alpha_2+6\alpha_3+6k^2\beta)}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)(1+\beta)(k^2\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+k^2\beta)^5} \quad \ldots (2.21)$$

3 – الجانب التجريبي

سنعرض في هذا الجانب سلوك معولية النظام Cascade .

3-1 سلوك المعولية لنظام Cascade لتوزيع معكوس لندلي :

The Reliability behavior For Cascade system to Inverse Lindley distribution

سوف نقوم في هذا القسم بدراسة سلوك المعولية لنظام Cascade لكل من (R_3 , R_2) بالاعتماد على قيم المعلمات المحدد لتوزيع معكوس لندلي . يتم الحصول على قيم المعولية الحدية R(1) , R(2) , R(3) عن طريق المعادلات الاتية (2.15) , (2.17) , (2.19) على الترتيب , اما بنسبة الى معولية النظام لتوزيع معكوس لندلي (R_3 , R_2) تتم لدى المعادلات الاتية (2.20) , (2.21) ويتم عرضها في الجدولين (1-3),(2-3) لمعرفة سلوك معولية النظام (R_3 , R_2) والذي تم الحصول عليها عن طريق الاعتماد على قيم مختلفة للمعلمات (α, β)

الجدول (3−1) يمثل المعولية الحدية R(1) , R(2) مع معولية النظام R_2 عندما الإجهاد والمتانة تتبع توزيع معكوس لندلي وتم استعمال عامل توهين $k = 0.5$

α_1	α_2	α_3	β	R(1)	R(2)	R_2
2	2	2	0.6	0.8409	0.0636	90450.
3	3	3	0.6	0.8999	0.0444	94430.
4	4	4	0.6	0.9282	0.0343	96250.
5	5	5	0.6	0.9445	0.0279	97240.
2	2	2	0.7	0.8078	0.0742	8820.
3	3	3	0.7	0.8767	0.0539	93060.
4	4	4	0.7	0.9107	0.0420	95270.
5	5	5	0.7	0.9306	0.0345	96510.
2	2	2	0.8	0.7758	0.0880	86380.
3	3	3	0.8	0.8536	0.0402	89380.
4	4	4	0.8	0.8930	0.0449	93790.
5	5	5	0.8	0.9163	0.0412	95750.

نلحظ أن معولية النظام R_2 تزداد مع زيادة قيمة معلمة المتانة وكذلك المعولية الحدية R(1) تزداد ايضا , بينما المعولية الحدية R(3) , R(2) تتناقص.

الجدول (3−2) يمثل المعولية الحدية R(1) , R(2) , R(3) مع معولية النظام R_3 عندما الإجهاد والمتانة تتبع توزيع معكوس لندلي وتم استعمال عامل توهين $k = 0.5$

α_1	α_2	α_3	β	R(1)	R(2)	R(3)	R_3
2	2	2	0.6	0.8409	0.0636	0.0233	0.9278
3	3	3	0.6	0.8999	0.0444	0.0123	0.9566
4	4	4	0.6	0.9282	0.0343	0.0078	0.9703
5	5	5	0.6	0.9445	0.0279	0.0055	0.9779
2	2	2	0.7	0.8078	0.0742	0.0286	0.9106
3	3	3	0.7	0.8767	0.0539	0.0153	0.9459
4	4	4	0.7	0.9107	0.0420	0.0098	0.9626
5	5	5	0.7	0.9306	0.0345	0.0070	0.9721
2	2	2	0.8	0.7758	0.0880	0.0339	0.8977
3	3	3	0.8	0.8536	0.0402	0.0183	0.9121
4	4	4	0.8	0.8930	0.0449	0.0118	0.9497
5	5	5	0.8	0.9163	0.0412	0.0084	0.9659

نلحظ أن معولية النظام R_3 تزداد مع زيادة قيمة معلمة المتانة وكذلك المعولية الحدية R(1) تزداد ايضا , بينما المعولية الحدية R(2) , R(3) تتناقص.

الجدول (3−3) يمثل المعولية الحدية R(1) , R(2) مع معولية النظام R_2 عندما الإجهاد والمتانة تتبع توزيع معكوس لندلي وتم استعمال عامل توهين $k = 0.5$

α_1	α_2	α_3	β	R(1)	R(2)	R_2
2	2	2	0.6	0.8409	0.0636	0.9045
2	2	2	0.7	0.8078	0.0760	0.8838
2	2	2	0.8	0.7758	0.0880	0.8638
3	3	3	0.6	0.8999	0.0444	0.9443
3	3	3	0.7	0.8767	0.0531	0.9298
3	3	3	0.8	0.8536	0.0633	0.9169
4	4	4	0.6	0.9282	0.0343	0.9625
4	4	4	0.7	0.9107	0.0420	0.9527
4	4	4	0.8	0.8930	0.0499	0.9429
5	5	5	0.6	0.9445	0.0028	0.9473
5	5	5	0.7	0.9306	0.0114	0.9420
5	5	5	0.8	0.9163	0.0212	0.9375

نلحظ أن المعولية الحدية R(2) تزداد عند زيادة قيم معلمة الاجهاد بينما R(1) تتناقص , اما معولية النظام R_2 تتناقص عند زيادة قيم معلمة الاجهاد .

الجدول (3−4) يمثل المعولية الحدية R(1) , R(2) , R(3) مع معولية النظام R_3 عندما الإجهاد والمتانة تتبع توزيع معكوس لندلي وتم استعمال عامل توهين $k = 0.5$

α_1	α_2	α_3	β	R(1)	R(2)	R(3)	R_3
2	2	2	0.6	0.8409	0.0636	0.0233	0.9278
2	2	2	0.7	0.8078	0.0760	0.0286	0.9124
2	2	2	0.8	0.7758	0.0880	0.0339	0.8977
3	3	3	0.6	0.8999	0.0444	0.0123	0.9566
3	3	3	0.7	0.8767	0.0531	0.0153	0.9451
3	3	3	0.8	0.8536	0.0633	0.0183	0.9352
4	4	4	0.6	0.9282	0.0343	0.0078	0.9703
4	4	4	0.7	0.9107	0.0420	0.0098	0.9625
4	4	4	0.8	0.8930	0.0499	0.0118	0.9547
5	5	5	0.6	0.9445	0.0028	0.0055	0.9528
5	5	5	0.7	0.9306	0.0114	0.0070	0.9490
5	5	5	0.8	0.9163	0.0212	0.0084	0.9459

نلحظ أن المعولية الحدية R(2),R(3) تزداد عند زيادة قيم معلمة الاجهاد بينما R(1) تتناقص , اما معولية النظام R_3 تتناقص عند زيادة قيم معلمة الاجهاد نلحظ أن المعولية الحدية R(3) , R(2) تزداد عند زيادة قيم معلمة الاجهاد بينما R(1) تتناقص , اما معولية النظام R_3 و R_2 تتناقص لقيم الصغرى لمعلمة المتانة عند زيادة قيم معلمة الاجهاد .

1-5 الاستنتاجات

1- أن معولية النظام R_3 تزداد عن طريق زيادة قيمة معلمة المتانة بينما معولية نظام R_2 تتناقص .
2- أن معولية النظام R_3 تتناقص عن طريق زيادة قيمة معلمة الإجهاد وكذلك معولية نظام R_2 تتناقص ايضا.
3- أن المعولية الحدية R(1) تزداد ايضا مع زيادة قيمة معلمة المتانة, بينما المعولية الحدية R(3) R(2) , تتناقص .
4- أن المعولية الحدية R(3) , R(2) تزداد عند زيادة قيم معلمة الاجهاد بينما R(1) تتناقص.

1-5 التوصيات

1- توسيع نطاق البحث لكي يشمل توزيعات حديثة الاخرى لدراسة معولية نظام cascade للإجهاد – المتانة .
2- استخدام الطرائق التقدير لتقدير معولية نظام cascade لتوزيع معكوس لندلي للعثور على أفضل الطرق التي يتم منحها أفضل قيمة مقدرة .
3- استخدام نظام (2+1) cascade للإجهاد – المتانة لتوزيع معكوس لندلي .

المصادر

1- Basu, S., Singh, S. K., & Singh, U. (2017). Parameter estimation of inverse Lindley distribution for Type-I censored data. Computational Statistics, 32(1), 367-385.
2- Devi, M.T., Maheswari, T.U.,& Swathi, N. (2016). Cascade System Reliability with Stress and Strength Follow Lindley Distribution.
3- Doloi, C. , Borah, M., & Gogoi, J. (2013). " Cascade System with Pr(X < Y < Z) ". Journal of Informatics and Mathematical Sciences , Volume 5 Number 1, pp. 37–47.
4- Gogoi, J. & Borah, M.(2012). Estimation of Reliability for Multicomponent Systems using Exponential , Gamma and Lindley Stress-Strength Distributions. Journal of Reliability and Statistical Studies; Vol. 5, Issue 1 ,p. 33-41 .
5- Maheswari, T. U. & Swathi, N.(2013). "Cascade Reliability for Generalized Exponential Distribution". International Journal Of Computational Engineering Research (ijceronline.com) Vol. 3 Issue. 1, PP 132-136
6- Pandit, S. N., & Sriwastav, G. L. (1975). "Studies in Cascade Reliability-I". IEEE Transactions on Reliability, 24(1), 53-56.