اسلوب جديد لمعالجة مشكلة برمجة الاعداد الصحيحة

Integer programming problem: A new approach

د. عواد كاظم شعلان (*)

المقدمة

تعتمد طرائق حل مشكلة برمجة الاعداد الصحيحة، على حل مشكلة البرمجة الخطية باحد الطرائق المعروفة، مثل طريقة الـ Simplex. فاذا كانت قيم المتغيرات الاساسية اعداداً صحيحة فهذا المطلوب. اما اذا تضمن الحل الامثل اعداداً غير صحيحة، فتستخدم طريقة التقلايب، او مستوى القطع الامثل (جزاع ،١٩٨٥) او طريقة جيومري (شمخي والسلمان، ١٩٨٨) لمحاولة الحصول على حل قريب من الحل الامثل بمتغيرات عددية صحيحة.

تؤدي الطرائق المستخدمة هذه الى التضحية بجزء من امثلية دالة الهدف، وهو ما يؤدي بدوره الى تعطيل استخدام جزءاً من الموارد المتاحة، وهو ما يتطلب ان يكون قسماً من المتغيرات الوهمية ليست أصفاراً.

مشكلة البحث

ان الطرائق السابقة المستخدمة للحصول على حل لمشكلة البرمجة العددية، تمتاز بالتكرار والاطالة لغرض الحصول على قيم عددية صحيحة لمتغيرات الحل الامثل.

الهدف من البحث

يهدف هذا البحث الى معالجة مشكلة الاعداد الصحيحة، مع عدم المساس بالحل الامثل لمشكلة البرمجة الخطية.

(*) استاذ مساعد – هيئة المعاهد الفنية – المعهد التقني – بابل.

الجانب النظري

بغية عدم الاسهاب، سنفترض ان المشكلة المدروسة، هي مشكلة تعظيم دالة الهدف

$$Z = \underline{C}^T \underline{X}$$

S. to

$$A\underline{X} \le \underline{b},$$

$$\underline{X} \ge \underline{0} \quad (1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

حيث،

$$X^T = (X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_n) \qquad , \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & amn \end{vmatrix}$$
$$b^T = (b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots, b_m)$$
$$C^T = (C_1, C_2, C_3, \ldots\ldots, C_n)$$

توضع المشكلة (١) في جدول الـ Simplex كما في الجدول ١-a والتي يمكن اعادة صياغتها كما في الجدول ١-b.

الجدول -1- الصيغة الاساسية لطريقة الـ Simplex

1-a

		$\underline{X}^T$	$\underline{S}^T$	Solution
$\underline{0}$	S	A	I	$\underline{b}$
$Z_j - C_j$		$-\underline{C}^T$	$\underline{0}^T$	0

1-b

		$\underline{X_1}^T$	$\underline{X_2}^T$	$\underline{S_1}^T$	$\underline{S_2}^T$	Solution
$\underline{0}$	$\underline{S_1}$	A_{11}	A_{12}	I	0	b_1
$\underline{0}$	$\underline{S_2}$	A_{21}	A_{22}	0	I	b_2
$Z_j - C_j$		$-\underline{C_1}^T$	$-\underline{C_2}^T$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	0

$$H = \begin{vmatrix} A_{11}^{-1} & 0 & o \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I & o \\ \underline{C}^T A_{11}^{-1} & \underline{0}^T & 1 \end{vmatrix}$$

وبضرب الجدول (١-b) بالصفوفة H نحصل على الجدول –٢- الذي يمثل الحل الامثل لمشكلة البرمجة الخطية (أن وجد).

الجدول -2- الحل الامثل بطريقة الـ Simplex

		$\underline{X}_1^T$	$\underline{X}_2^T$	$\underline{S}_1^T$	$\underline{S}_2^T$	Solution
$\underline{C}_1$	$\underline{X}_1$	I	$A_{11}^{-1}A_{12}$	A_{11}^{-1}	0	$A_{11}^{-1}b_1$
$\underline{0}$	$\underline{S}_2^T$	0	$A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$	$-A_{21}A_{11}^{-1}$	I	$b_2-A_{21}A_{11}^{-1}b_1$
Zj - Cj		0_1^T	$-C_2^T+C_1^TA_{11}^{-1}A_{12}$	$C_1^TA_{11}^{-1}$	$\underline{0}_2^T$	$Z=C_1^TA_{11}^{-1}b_1$

وبوضع قيمة $\underline{S}_1=\underline{0},\underline{X}_2=\underline{0}$ نحصل على $S_2=b_2-A_{21}A_{11}^{-1}b_1, X_1=A_{11}^{-1}b_1$.

يوضح الجدول –٢- الحل الامثل لطريقة الـ Simplex، وتظهر قيم المتغيرات الاساسية $\underline{X}_1,\underline{S}_2$ في العمود solution، وهو ما يمثل حل المشكلة الابتدائية Primary problem، بينما يظهر حل المشكلة الثنائية Duality في الصف الاخير من الجدول –٢-.

حيث يمثل الصف الاخير من الجدول –٢- ما يلي:

قيمة Z المثلى $Z=C_{11}^TA_{11}^{-1}b_1$

المتجه 0^T يمثل قيم y_2 التي تساوي صفر المتغيرات الغير اساسية في المشكلة الثنائية

المتجه $C_1^TA_{11}^{-1}$ قيم $Y_1^T\geq 0^T$، المتغيرات الاساسية في المشكلة الثنائية

$-C_2^T+C_1^TA_{11}^{-1}A_{12}$ قيمة المتجه $V_2^T\geq O^T$ في المشكلة الثنائية، وتمثل مقدار الخسارة الناتجة عن انتاج وحدة واحدة من كل عنصر من عناصر الانتاج X_1^T.

- المتجه O_1^T قيم $V_1^T=O^T$ في المشكلة الثنائية "متغيرات غير اساسية" ويمثل مقدار الربح الناتج عن انتاج وحدة واحدة اضافية من كل عنصر من عناصر X_1^T.

يتضح من الجدول –٢- ان $Y_1^T = C_1^T A_{11}^{-1}$ "قيم المتغيرات الاساسية في المشكلة الثنائية"، وان $Z = C_1^T A_{11}^{-1} b_1$، أي ان $Z = Y_1^T b_1$، وهذا يعني ان Y_{11} يمثل مقدار التغير في قيمة Z نتيجة لتغير قيم b_{1i} بمقدار وحدة واحدة وعليه، فان كل تغير في قيم b_1 يتبعه تغير في قيمة Z بمقدار $\Delta Z = Y_1^T \Delta b_1$. لهذا يمكن السيطرة على قيمة Z من خلال السيطرة على قيم $\underline{b}1$، أي من خلال السيطرة على تبادل الموارد او الامكانات المتاحة.

وبما ان قيم $\underline{X}1$ تمثل قيم المتغيرات الاساسية التي تجعل Z في نهايتها العظمى

$$X_1 = A_{11}^{-1} b_1, \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

لذا يمكن السيطرة على قيمة Z من خلال تحويل قيم $\underline{X}1$ الى اعداد صحيحة.

ملاحظة:
b متغير، $\underline{b}$ متجه، X متغير اساسي في المشكلة الابتدائية، Y متغير اساسي في المشكلة الثنائية، S متغير وهمي في المشكلة الابتدائية، V متغير وهمي في المشكلة الثنائية، R متغير صناعي في المشكلة الثنائية.

الاسلوب الجديد:
يعتمد الاسلوب الجديد على مبدأ تحليل الحساسية، من خلال السيطرة على قيم المتغيرات، وقيمة دالة الهدف، والامكانات المتاحة "حدود القيود" في نفس الوقت.

نظرية* -1-
ان تغير قيم المتغيرات الاساسية من X_1 بمقدار π لتحويلها الى اعداد صحيحة $X_1^* = X_1 + \pi$ يستلزم تغيير قيم $\underline{b}_1$ بمقدار $t = A_{11}\pi$ لكي يبقى الحل حلاً مثلاً.

---

* الباحث

البرهان:

افرض ان π هو مقدار التغير في قيم X_1 لتحويلها الى اعداد صحيحة X_1^*.

بما ان

$X_1 = A_{11}^{-1}b_1$، فـــــان $b_1 = A_{11}X_1$ وبمــــــا ان $X_1^* - \pi = A_{11}^{-1}b_1$، فـــــان

$b_1 = A_{11}X_1^* - A_{11}\pi, b_1^* = A_{11}X_1^*$، أي ان

$$A_{11}\pi = b_1 + A_{11}X_1^* = t, \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

أي ان مقــدار التغيــر فــي $\underline{b}_1$ لغـرض تحويـل $\underline{X}_1$ الــى اعــداد صــحيحة X_1^*هــو $t = A_{11}\pi$، علماً ان π تحدد من قبل متخذ القرار بناءاً على النتائج التي توصل اليها في الحل الامثل. فاذا كانت الموارد محدودة فعلاً $\sum b_1 = T$ فان مقدار التغير في قيم b_1 لتحويلها الى b_1^* والحصول على قيم عددية صحيحة لـ $\underline{X}_1$ يجب ان لايخل بالشرط $\sum b_1^* = T$.

وخلاصة ذلك ان كل تغير في قيمة $\underline{b}1$ سيؤدي الى:

١- تغير في قيمة Z، $Z = C_1^T A_{11}^{-1}b_1$

٢- تغير في قيمة $\underline{X}1$، $X_1 = A_{11}^{-1}b_1$

٣- تغير في قيمة $\underline{S}_2$. $S_2 = b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1$

وعليه يمكن السيطرة على قيم Z من خلال السيطرة على قيم $\underline{b}1$ بحيث تكون قيم $\underline{X}_1$ اعداداً صحيحة، مع عدم التضحية بامثلة Z قدر الامكان، ومحاولة الاستفادة من الامكانات الفائضة التي لم تستخدم والمتمثلة بـ $S_2 = b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1$ ويمكن الاستفادة من هذا الاسلوب لغرض تخطـيط الانتــاج، أي مــن خــلال تحديــد قــيم $\underline{X}_1$، أي ان π لا يشــترط ان تكــون كســراً "$0 \le |\pi| \le 1$" أي بتحديد قيم X_1^* بعد ان يتم ايجاد جدول الحل الامثل.

نظرية* -2-

اذا كان الحل الامثل لمشكلة البرمجة الخطية، حلاً مجزاً، فان مقدار التغير في قيم $\underline{b_1}$ يجب ان يحقق المتباينة (٤) لاستمرار الحل الامثل.

$$b_2 \geq A_{21}(X_1 + \pi),$$

البرهان:

بما ان $S_2 = b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1 \geq 0$،

وان مقدار التغير في قيم $\underline{b_1}$ بمقدار $\underline{t}$ يؤدي الى تغير في قيم $\underline{S_2}$ بمقدار $\Delta S_2 = -A_{21}A_{11}^{-1}t$، فان هذا يعني ان

$$S_2^* = b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1 - A_{21}A_{11}^{-1}t \geq 0$$
$$S_2^* = b_2 - A_{21}X_1 - A_{21}A_{11}^{-1}A_{11}\pi \geq 0$$
$$S_2^* = b_2 - A_{21}(X_1 + \pi) \geq 0$$

أي ان $b_2 \geq A_{21}(X_1 + \pi)$

وهذا يعني، اننا قبل ان نقوم بحساب مقدار التغير في قيم $\underline{b_1}$ لغرض الحصول على قيم جديدة لـ $\underline{X_1}$ (اعداد صحيحة او غير صحيحة)، يجب ان نتحقق من صحة المتباينة (٤) لمعرفة هل ان هذا التغير ممكناً ام لا؟

الجانب التطبيقي

بغية تطبيق هذا الاسلوب، ولغرض عدم الاسهاب، سنأخذ مثالين لتعظيم دالة الهدف، يتم في الاولى استخدام كافة الموارد، ونحصل على حل اساسي امثل، وفي الثانية يوجد هدر في الموارد، مما يؤدي الى حل امثل مجزأ.

---

* الباحث

مثال * -1-

يقوم مصنع لانتاج البطاريات، بانتاج ثلاثة انواع من البطاريات، يرغب المصنع بزيادة ارباحه من خلال تنظيم عملية الانتاج. الجدول -٣- يوضح ربحية الوحدة من كل نوع، الوقت المتاح لكل خط انتاجي، عدد الساعات اللازمة لانتاج الوحدة من كل نوع في كل مرحلة انتاجية. علما ان كل نوع يمر بثلاثة مراحل انتاجية.

الجدول -3-

النوع	المرحلة			ربحية الوحدة
	1	2	3	
1	3	2	1	43
2	2	4	0	50
3	2	1	2	45
الوقت المتاح	82	80	30	

تصاغ هذه المشكلة كما يلي

$$\text{Max } Z = 43X_1 + 50X_2 + 45X_3$$

$$\text{S. t.} \quad 3X_1 + 2X_2 + 2X_3 < 82$$

$$2X_1 + 4X_2 + X_3 < 80$$

$$X_1 + 2X_3 < 30$$

$$X_1, \quad X_2, \quad X_3 > 0$$

* المثال 1 و 2 من اعداد الباحث.

والجدول -٤- يوضح الصيغة الاساسية لمشكلة الـ Simplex والحل الامثل لها

الجدول -4-

4 – a

		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Sol.
0	S_1	3	2	2	1	0	0	82
0	S_2	2	4	1	0	1	0	80
0	S_3	1	0	2	0	0	1	30
Z_j-C_j		-43	-50	-45	0	0	0	0

4 - b

		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Sol.
43	X_1	1	0	0	0.8	-0.4	-0.6	15.6
50	X_2	0	1	0	-0.3	0.4	0.1	10.4
45	X_3	0	0	1	-0.4	0.2	0.8	7.2
Z_j-C_j		0	0	0	1.4	11.8	15.2	1514.8

وهذا يعني $X_1= 15.6$, $X_2= 10.4$, $X_3= 7.2$، وهي قيم عددية غير صحيحة $S_1=$ $S_2= S_3=0$، $Z= 1514.8$.

ويمثل الصف Z_j-C_j حل المشكلة الثنائية $Y_1=1.4$، $Y_2=11.8$, $Y_3=15.2$, $V_1=V_2=V_3=0$.

يمثل $y_1=1.4$ مقدار الزيادة في قيمة دالة الهدف Z عندما تزداد ($b_2=82$) بمقدار وحدة واحدة لتصبح ($b_1^* = 83$) تأتي هذه الزيادة في قيمة Z نتيجة لزيادة انتاج X_1 بمقدار ٠,٨* وحدة تحقق ربحاً مقداره (٤٣ x 0.8= 34.4) وانخفاض انتاج X_2 بمقدار ٠,٣ وحدة تحقق خسارة مقدارها (٥٠x0.3=15)، وانخفاض انتاج X_3 بمقدار ٠,٤ وحدة تحقق خسارة مقدارها (٤٥x0.4=18) أي ان مقدار التغير في قيمة Z هو

$$\Delta Z = 43x\,0.8 - 50x\,0.3 - 45x\,0.4 = 1.4, \qquad \text{......................}(5)$$

وعليه فان تغير الوقت المتاح للمرحلة الاولى بمقدار t_1 من الوحدات يؤدي الى تغير قيمة دالة الهدف Z بمقدار $\Delta_1 Z = 1.4t_1$، وتغير في قيمة X_1, X_2, X_3 بمقدار $\Delta_1 X_1, \Delta_1 X_2, \Delta_1 X_3$

* انظر العمود S_1.

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 X_1 \\ \Delta_1 X_2 \\ \Delta_1 X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{11} \\ \pi_{12} \\ \pi_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0.8t_1 \\ -0.3t_1 \\ -0.4t_1 \end{bmatrix}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

كما ان تغير الوقت المتاح للمرحلة الثانية بمقدار t_2 من الوحدات يؤدي الى تغير قيمة دالة الهدف بمقدار $\Delta_2 Z = 11.8t_2$ وتغير في قيمة X_1, X_2, X_3 بمقدار $\Delta_2 X_1, \Delta_2 X_2, \Delta_2 X_3$

$$\begin{bmatrix} \Delta_2 X_1 \\ \Delta_2 X_2 \\ \Delta_2 X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{21} \\ \pi_{22} \\ \pi_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4t_2 \\ +0.4t_2 \\ +0.2t_2 \end{bmatrix}, \quad \boxed{\ldots\ldots\ldots (7)}$$

وان تغير الوقت المتاح للمرحلة الثالثة بمقدار t_3 من الوحدات يؤدي الى تغير قيمة دالة الهدف Z بمقدار $\Delta_3 Z = 15.2t_3$ وتغير في قيمة X_1, X_2, X_3 بمقدار $\Delta_3 X_1, \Delta_3 X_2, \Delta_3 X_3$

$$\begin{bmatrix} \Delta_3 X_1 \\ \Delta_3 X_2 \\ \Delta_3 X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{31} \\ \pi_{32} \\ \pi_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6t_3 \\ +0.1t_3 \\ +0.8t_3 \end{bmatrix}, \quad \boxed{\ldots\ldots\ldots (8)}$$

وعليه فان التغير في دالة الهدف Z نتيجة لتغير قيم b_1, b_2, b_3 بمقدار t_1, t_2, t_3 على التوالي يكون

$$\Delta X = \Delta_1 Z + \Delta_2 Z + \Delta_3 Z = 1.4t_1 + 11.8t_2 + 15.2t_3, \ldots\ldots\ldots (9)$$

والتغير في قيم X_1, X_2, X_3 هو

$$\begin{vmatrix} 0.8 & -0.4 & -0.6 \\ -0.3 & 0.4 & 0.1 \\ -0.4 & 0.2 & 0.8 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X_1 \\ \Delta X_2 \\ \Delta X_3 \end{bmatrix},$$

ان $A^{-1}t = \pi$

$$t = A\pi, \ldots\ldots\ldots(11)$$

أي ان مقدار التغير في دالة الهدف هو

$$\Delta Z = Y^T A_{11}\pi, \ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

من المعادلتين (١٢، ١١) يمكن معرفة التغير الذي يحصل على قيمة Z نتيجة للتغير في قيم $\underline{b}$ من ناحية، والتعرف على مدى استجابة الحل الامثل للتغيرات التي تطرأ على الموارد المتاحة من ناحية ثانية، والحصول على حل لمشكلة برمجة الاعداد الصحيحة من خلال تحديد قيم π ، ومعرفة إمكانية المناقلة بين الموارد المتاحة في المراحل الانتاجية المختلفة من ناحية ثالثة.
فاذا قررنا الان، ولغرض الحصول على قيم عددية صحيحة لمتغيرات الحل الامثل، ولتكن $X_3=7, X_2=11, X_1=15$ فان وعليه فان،

$$t = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -0.6 \\ +0.6 \\ -0.2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \end{vmatrix}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

وهذا يعني ان $b_1^* = 81, b_2^* = 81, b_3^* = 29$ ، وان

$$\Delta Z = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1.4 \\ 11.8 \\ 15.2 \end{vmatrix} = -4.8 \;,\; b_1^* + b_2^* + b_3^* = 191 < \sum b_i = 192$$

أي انه يمكن اعادة توزيع الموارد المتاحة كما يلي:

٨١ ساعة للخط الاول، ٨١ ساعة للخط الثاني و ٢٩ ساعة للخط الثالث ويبقى فائض زمني مقداره ساعة واحدة.

ولو أردنا $X_3 = 7, X_2 = 10, X_1 = 16$ فان $\pi_1 = 0.4, \pi_2 = -0.4, \pi_3 = -0.2$ وان

$t_1 = 0, t_2 = -1, t_3 = 0$ وان $\Delta Z = -11.8$

مثال -2-

افرض ان حدول المعلومات الخاصة بانتاج مصنع البطاريات هو كما في الجدول -٥-

الجدول -5-

الجدول - 5 -

النوع	المرحلة			ربحية الوحدة
	1	2	3	
1	3	1	2	30
2	4	5	2	50
3	6	1	4	10
الوقت المتاح	54	39	60	

تصاغ هذه المشكلة كما يلي

$$\text{Max } Z = 30X_1 + 50X_2 + 10X_3$$
$$\text{S.t.} \quad 3X_1 + 4X_2 + 6X_3 < 54$$
$$X_1 + 5X_2 + X_3 < 39$$
$$2X_1 + 2X_2 + 4X_3 < 60$$
$$X_1, \quad X_2, \quad X_3 > 0$$

والجدول –٦- يوضح الصيغة الاساسية لمشكلة الـSimplex والحل الامثل لها

الجدول -6-

6 – a

		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Sol.
0	S_1	3	4	6	1	0	0	54
0	S_2	1	5	1	0	1	0	39
0	S_3	2	2	4	0	0	1	60
Z_j-Cj		-43	-50	-45	0	0	0	0

6 - b

		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Sol.
30	X_1	1	0	26/11	5/11	-4/11	0	114/11
50	X_2	0	1	-3/11	-1/11	3/11	0	63/11
0	S_3	0	0	-2/11	-8/11	2/11	1	306/11
Z_j-C_j		0	0	520/11	100/11	30/11	0	6570/11

وهـــــــذا يعنـــــي ان حـــــــل المشـــــــكلة الابتدائيـــــــة هو $Z=6570/11, X_3=0, X2= 63/11, X_1= 114/11, S_1=0, S_2=0, S_3=306/11$

وان حل المشكلة الثنائية هو

$Z= 6570/11, Y_3=0, Y_2=30/11, Y_1= 100/11, V_3=520/11, V_2=0, R_1=0, R_2=0, R_3=0$

من هذا يتضح لدينا وجود $S_3/306/11$ وحدة زمنية فائضة في المرحلة الانتاجية الثالثة، أي ان هنالك عدم دقة في توزيع الموارد المتاحة على المراحل الانتاجية، هذا الفائض يمكن الاستفادة منه بتوزيعه على المرحلتين الانتاجيتين ١ و٢ من ناحية واستخدامه بنفس الوقت للحصول على اعداد صحيحة للمتغيرات الاساسية من ناحية ثانية، ومعرفة الى أي مدى يمكن تغيير قيم b_1, b_2.

بناءاً على معلومات الجدول ٦-b لنفرض اننا رغبنا بالحصول على قيم عددية صحيحة للمتغيرين X_1,X_2 ولتكن $X_1=11, X_2=6$ لذا فان $\pi_1 = 7/11, \pi_2 = 3/11$

$$A_{21}(X_1+\pi)=\begin{pmatrix}2 & 2\end{pmatrix}\left(\begin{vmatrix}114/11\\63/11\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}7/11\\3/11\end{vmatrix}\right)=34$$

من المعادلة –٤- فان هذا الانتاج ممكن لان $b_2 \geq A_{21}(X_1+\pi)$

وعليه فان $\begin{vmatrix}3\\2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 4\\1 & 5\end{vmatrix}\begin{vmatrix}7/11\\3/11\end{vmatrix}= t = A_{11}\pi$ أي ان هذا الانتاج يتطلب زيادة الوقت المخصص للمرحلة الانتاجية الاولى بمقدار ٣ ساعات والوقت المخصص للمرحلة الانتاجية الثانية بمقدار ٢ ساعة. وهذا الوقت يمكن تعويضه من الوقت الفائض في المرحلة الانتاجية الثالثة. أي ان القيود تكون كما يلي:

$$3X_1+4X_2+6X_3 \leq 57$$

$$X_1+5X_2+X_3 \leq 41$$

$$2X_1+2X_2+4X_3 \leq 55$$

ونتيجة لذلك يكون

$$X_1=11, X_2=6, X_3=0$$

$$S_1=0, S_2=0, S_3=21$$

$$Z^*=30(11)+50(6)=630$$

بمعنى اخر $\Delta Z = 3(100/11)+2(30/11)=360/11$ ، ومنه

$$Z^* = Z + \Delta Z = 630$$

الاستنتاجات

ان استخدام هذا الاسلوب يؤدي الى:

١- الحصول على قيم عددية صحيحة لمتغيرات الحل الامثل.

٢- امكانية تحويل الموارد الفائضة في بعض المراحل الانتاجية الى المراحل الانتاجية التي تعاني من قلة الموارد المتاحة.

٣- تقليص الوقت الضائع نتيجة لزيادة حجم الانتاج.

٤- امكانية زيادة قيمة دالة الهدف من خلال السيطرة على توزيع الموارد.

٥- تحقق اختباراً سريعاً عن امكانية تنفيذ الانتاج المخطط بموجب جداول الانتاج وخرائط تقدم العمل.

التوصيات

بعد تطبيق هذه الطريقة على امثلة اختبارية قليلة في عدد متغيراتها وقيودها، فان تطبيقها في مجال الصناعات الكبيرة يحقق لنا وفورات مالية ذات اهمية كبيرة لامكانية السيطرة على توزيع الموارد والانتاج المخطط والمناورة بالموارد المتاحة بحيث تقضي على الوقت الضائع في تشغيل الايدي العاملة والمكائن واستخدام الخزين... الخ.

المصادر

١- جزاع، عبد ذياب، بحوث العمليات، بغداد ١٩٨٥.

٢- شمخي والسلمان، عدنان وضوية، مقدمة في بحوث العمليات، دار الكتب للطباعة والنشر، جامعة الموصل ١٩٨٨.

٣- بخايا ورسام، ماجد عبدالله وفاروق، بحوث العمليات، بغداد ٢٠٠٠م.

٤- سلسلة ملخصات شوم.

٥- SAUL.I.GASS, Linear programming, McGraw Hill, New york, 1985, .pp. 249-266, 5th Edit,

٦- WALTER W. GARVIN, Introduction to linear programming, , New York, 1960, McGraw Hill.