تصميم خطط عينات القبول باستعمال توزيع Lomax لبيانات مراقبة من النوع الاول

م.د. احمد ذياب احمد م. سهيل نجم عبود
قسم الاحصاء / كلية الادارة والاقتصاد- جامعة بغداد

Abstract:

This paper deals with constructing a single acceptance sampling plans (n = k r, c) when the time to failure is considered random variable, following Lomax distribution with three parameter (α:shape parameter, λ: scale parameter, δ: location parameter) where the parameters (α, λ) are estimated using maximum likelihood method, while the third parameter (δ) is considered constant. The designed plan are constructed using the probability of acceptance. Taking a censored type one sampling under consideration all the derivation and results are explained in the research.

Keywords: Acceptance Sampling Inspection Plan, Consumer's Risk, Operating Characteristics Curve, Shape Parameter (α), Scale Parameter(λ), Location Parameter (δ).

1- مقدمة: Introduction

تعتبر خطط عينات القبول من ادوات السيطرة النوعية في المنتوجات والتي يتم اعتمادها عندما تقيم نوعية المنتوج بواسطة العينات بدلا من الفحص الشامل الذي يتطلب وقت وكلفة، ويعتبر غير مجدي في حالات الفحص التدميري الذي يؤدي الى تلف الوحدات، وقد نشرت العديد من البحوث عن هذا الموضوع من قبل الباحث (Haled) (1981)، (Guenther) (1977)، (Gupta) (2002)، الدوري (2004)[2]، (Aslam and Shahbaz) (2007)[6]، (Aslam and Jun) (2009)[5] واخرون، وقد اهتم كثير من الباحثين في الآونة الاخيرة بتصميم خطط عينات قبول اخذين وقت الاشتغال لحين الفشل بنظر الاعتبار باعتبار ان هذا الوقت هو متغير عشوائي يأخذ صيغة توزيع احتمالي معين قد يكون توزيع ويبل (weibll) او توزيع كاما (Gamma) وبالنسبة لنا ارتأينا تصميم خطط عينات القبول لفحص المنتوج عندما يكون زمن الاشتغال للوحدات المنتجة لحين الفشل هو متغير عشوائي يتبع توزيع لوماكس (Lomax 1954) والذي يسمى ايضا بتوزيع باريتو (Pareto distribution) من النوع الثاني[4]، وعندئذ لابد من بحث طرائق تقدير معلمات هذا التوزيع، وتحديد نوع المعاينة المعتمدة هل هي كاملة او مبتورة وما هو نوع البتر، هل هو في حجم العينة ام في الوقت المستغرق لحين الفشل، وعليه ركزنا في بحثنا في بيانات مراقبة من النوع الاول (type-I censored data) حيث يتم قطع تجربة الفحص عند الزمن الثابت (T) وان الوحدات التي تفشل لغاية هذا الزمن هي (r)، وان (n-r) هي الوحدات الباقية بعد الزمن (T)، وان دالة التوزيع التجميعية (the cumulative distribution function(c.d.f)) ودالة الكثافة الاحتمالية (probability density function (p.d.f)) لتوزيع Lomax بثلاثة معلمات هما:

$$F(t)=1-\left(1+\frac{t-\delta}{\lambda}\right)^{-\alpha} \quad , \quad t \succ \delta \, , \, \lambda \succ 0, \, \alpha \succ 0, \, \delta \succ 0 \qquad (1-1)$$

$$f(t)=\frac{\alpha}{\lambda}\left(1+\frac{t-\delta}{\lambda}\right)^{-(\alpha+1)} \quad , \quad t \succ \delta \, , \, \lambda \succ 0, \, \alpha \succ 0, \, \delta \succ 0 \qquad (1-2)$$

يهدف البحث الى تقدير معلمات توزيع الوقت المستغرق لحين الفشل، وهو هنا توزيع لوماكس بالاعتماد في بيانات مراقبة من النوع الاول، حيث سيتم تقدير كل من (α) معلمة الشكل (shape parameter) و (λ) معلمة القياس (scale parameter) وافتراض ان (δ) معلمة الموقع (location parameter) هي ثابتة ومن ثم تصميم خطط عينات القبول لهذه البيانات.

2- تقديرات الامكان الاعظم: Maximum Likelihood Estimator (MLE)

ادناه اشتقاق تقديرات الامكان الاعظم بالاعتماد في بيانات مراقبة من النوع الاول اذ ان دالة الامكان لهذا النوع من البيانات هي.

$$L=\frac{n!}{(n-r)!}\prod_{i=1}^{r} f(t_i)[1-F(T)]^{n-r}$$
(2-1)

المعادلة (1-2) يعاد كتابتها بعد التعويض عن $f(t)$ و $F(t)$ بما يساويها من المعادلات (1-1) و (2-1) وكلاتي:

$$L=\frac{n!}{(n-r)!}\prod_{i=1}^{r}\frac{\alpha}{\lambda}\left(1+\frac{t_i-\delta}{\lambda}\right)^{-(\alpha+1)}\left(1+\frac{T-\delta}{\lambda}\right)^{-\alpha(n-r)}$$
(2-2)

وباخذ اللوغاريتم الطبيعي للمعادلة (2-2) لتكون بالشكل الاتي:

$$LnL=Ln\left(\frac{n!}{(n-r)!}\right)+Ln\left(\frac{\alpha^r}{\lambda^r}\right)-(\alpha+1)\sum_{i=1}^{r}Ln\left(1+\frac{t_i-\delta}{\lambda}\right)-\alpha(n-r)Ln\left(1+\frac{T-\delta}{\lambda}\right) \quad \textbf{(2-3)}$$

وباشتقاق المعادلة (3-2) بالنسبة الى (α) ، (λ) ومساواتها الى الصفر، نحصل في مقدرات الامكان الاعظم وكما يلي:

$$\frac{\partial LnL}{\partial\alpha}=0=\frac{r}{\hat{\alpha}}-\sum_{i=1}^{r}Ln\left(1+\frac{t_i-\hat{\delta}}{\hat{\lambda}}\right)-(n-r)Ln\left(1+\frac{T-\hat{\delta}}{\hat{\lambda}}\right)$$
(2-4)

$$\frac{\partial LnL}{\partial\lambda}=0=-\frac{r}{\hat{\lambda}}+(\hat{\alpha}+1)\sum_{i=1}^{r}\frac{(t_i-\hat{\delta})}{\hat{\lambda}(\hat{\lambda}+t_i-\hat{\delta})}+\hat{\alpha}(n-r)\left(\frac{(T-\hat{\delta})}{\hat{\lambda}(\hat{\lambda}+T-\hat{\delta})}\right)$$
(2-5)

من (4-2) نحصل في مقدر المعلمة (α)وكالاتي:

$$\frac{r}{\hat{\alpha}}=\sum_{i=1}^{r}Ln\left(1+\frac{t_i-\hat{\delta}}{\hat{\lambda}}\right)+(n-r)Ln\left(1+\frac{T-\hat{\delta}}{\hat{\lambda}}\right)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{r}{\sum_{i=1}^{r} Ln\left(1+\frac{t_i-\hat{\delta}}{\hat{\lambda}}\right) + (n-r)Ln\left(1+\frac{T-\hat{\delta}}{\hat{\lambda}}\right)}$$

(2-6)

ومن (5-2) نحصل في مقدار المعلمة (λ)وكالاتي:

$$\frac{r}{\hat{\lambda}} = (\hat{\alpha}+1)\sum_{i=1}^{r}\frac{(t_i-\hat{\delta})}{\hat{\lambda}(\hat{\lambda}+t_i-\hat{\delta})} + \hat{\alpha}(n-r)\left(\frac{(T-\hat{\delta})}{\hat{\lambda}(\hat{\lambda}+T-\hat{\delta})}\right)$$

$$\hat{\lambda} = \frac{r}{(\hat{\alpha}+1)\sum_{i=1}^{r}\frac{(t_i-\hat{\delta})}{\hat{\lambda}(\hat{\lambda}+t_i-\hat{\delta})} + \hat{\alpha}(n-r)\left(\frac{(T-\hat{\delta})}{\hat{\lambda}(\hat{\lambda}+T-\hat{\delta})}\right)}$$

(2-7)

ونظرا لان الباحث اعتبر معلمة الموقع ثابتة قد تمثل بالوسيط او افتراضها قيمة ثابتة لذلك لم يتم اشتقاق معادلة لوغاريتم دالة الامكان (3-2) بالنسبة للمعلمة (δ)، اما المعلمتان (λ, α) فيمكن تقديرهما من المعادلات (6-2) و (7-2) وفي التوالي باستعمال اسلوب التكرار اذ نعطي قيم اولية للمعلمات $(\delta, \lambda, \alpha)$ فنحسب قيمة (α) ثم نعوض قيمتها في المعادلة (7-2) لإيجاد قيمة المعلمة (λ) ونستمر بالتكرار الى ان يتحقق لدينا $|\lambda_{i+1}-\lambda_i| \prec \varepsilon$ اذ ان (ε) قيمة صغيرة جدا.

3- خطة عينات قبول المجموعة [7] The Group Acceptance Sampling Plan(GASP)

ان خطط عينات القبول (Acceptance Sampling Plan) تمثل مجموعة من الاجراءات لفحص المنتج النهائي، ويمكن الحصول في هذه الخطط تحت شرط ان التوزيع للوحدات المفحوصة يتبع توزيع (Lomax) ذي المعلمات الثلاثة $(\delta, \lambda, \alpha)$، وسنستعمل توزيع (Binomial) لتطوير خطط عينات القبول والتي يتم تحديدها من خلال ايجاد اصغر حجم عينة ممكن (n) وعند مستوى قبول مثبت مسبقا $(P^* = 0.50, 0.75, 0.95)$ وذلك بتحقيق المتباينة الخاصة باحتمال القبول الاتية:

$$\sum_{i=0}^{c} C_i^r p^i (1-p)^{r-i} \le 1-P^*$$

(3-1)

علما بان قيم (p) تحسب من الدالة التراكمية للتوزيع وكالاتي:

$$p = F(t) = 1-\left(1+\frac{t-\delta}{\lambda}\right)^{-\alpha}$$

اما دالة خاصية التشغيل (Operating Characteristic Function) لخطة عينات القبول (n,c) وهي احتمال قبول الدفعة في خطة المعاينة وتحسب وفق الصيغة الاتية:

$$OC(P)=\Pr\{i\le c\}=\sum_{i=0}^{c}C_i^r p^i(1-p)^{r-i}$$

(3-2)

ومن خلال هذه الخطط يمكن معرفة حجم العينة (n) وعدد الوحدات المعيبة المسموح بها (c) او عدد القبول.

اما خطة عينات قبول المجموعة وبالاعتماد في اختبار قطع الحياة (truncated life test) فيمكن استعمالها باتباع الخطوات الاتية:

1- يتم تحديد عدد من المجموعات (k) وكل مجموعة تحتوي في (r) من الانواع (حجم المجموعة) عند ذلك فان حجم العينة للدفعة يكون (n = k r).

2- اختيار عدد القبول (c) للمجموعة وزمن التجربة (t).

3- اجراء التجربة لـ (k) من المجموعات في وقت واحد ويتم تسجيل عدد الفشل لكل مجموعة.

4- تقبل الدفعة اذا في الاكثر (c) من الفشل حدث في كل المجموعات.

5- اقطع التجربة اذا اكثر من (c) فشل حدث في اي مجموعة وترفض الدفعة.

وباستعمال توزيع (binomial) لتطوير خطة عينات قبول المجموعة (GASP) والتي يتم تحديدها من خلال ايجاد حجم العينة (n = k r) وعند مستوى قبول $\left(P^*=0.50,0.75,0.95\right)$ وذلك بتحقيق المتباينة الاتية:

$$\left[\sum_{i=0}^{c}C_i^r p^i(1-p)^{r-i}\right]^k\le 1-P^*$$

(3-3)

4- مثال عددي Numerical Example

يتم توليد اعداد عشوائية من توزيع لوماكس (Lomax distribution) بالمعلمات $(\alpha=0.5,\lambda=1.5,\delta=0.2)$ اذ ان (u) تتوزع [uniform(0,1)] وباستعمال برنامج (Matlab) يتم توليد البيانات وفق الصيغة الاتية:

$$t=\left[\left[\left(\frac{1}{1-u}\right)^{1/\alpha}-1\right]\lambda\right]+\delta$$

وهذه البيانات كانت كالاتي:

Data:

0.20466, 0.20864, 0.20920, 0.21281, 0.21805, 0.21831, 0.22167, 0.22536, 0.22945, 0.24076, 0.24599, 0.25144, 0.25168, 0.25340, 0.25642, 0.27466, 0.29159, 0.32454, 0.32735, 0.33332, 0.33839, 0.33864, 0.34600, 0.35198, 0.35505, 0.35852, 0.36206, 0.36221, 0.36858, 0.36965, 0.37149, 0.38922, 0.40117, 0.40400, 0.40775, 0.41544, 0.41833, 0.41934, 0.42760, 0.43905, 0.44270, 0.45086, 0.47234, 0.47351, 0.47433, 0.47899, 0.47922, 0.48200, 0.48436, 0.49534, 0.50602, 0.51326, 0.54078, 0.54311, 0.54531.

وبتطبيق المعادلة (3-1) فان الجدول رقم (4-1) يبين افضل (اصغر) حجم عينة ضروري لفحص المنتوج وعند نسبة بتر (a=1, 1.5, 2)، كما ان قيم المعلمات $(\lambda=1.4869,\ \alpha=0.87547)$ تم تقديرها من المعادلات (2-7) و (2-8) وفي التوالي اما قيمة $(\delta=0.2)$ فقد تم تثبيتها

جدول رقم (1-4) يبين اصغر حجم عينة ضروري لفحص المنتوج

P^*	C			A
		1.0	1.5	2.0
0.50	0	1	1	1
	1	3	2	2
	2	4	4	4
	3	6	5	5
	4	8	7	6
	5	9	8	8
0.75	0	2	2	1
	1	4	3	3
	2	6	5	4
	3	7	6	6
	4	9	8	7
	5	11	9	9
0.95	0	4	3	3
	1	6	5	4
	2	8	7	6
	3	10	9	8
	4	12	10	9
	5	14	12	11

يتضح من الجدول (1-4) عندما يكون (P*=0.75, a=1, n=7) فان عدد الوحدات المعيبة المسموح بها في العينة (C=3) بينما عند معلمات الخطة (P*=0.95, a=1, n=10) ولعدد القبول (C=3) فان الفرق في الحجمين (n=7, n=10) يعزى الى ضرورة فحص وحدات اكثر لتحقيق احتمال قبول افي، وهذا الكلام ينطبق في بقية القيم الاخرى.

وبتطبيق المعادلة (2-3) فان الجدول رقم (2-4) يبين احتمال قبول الدفعة (OC) ولحجم عينة البيانات ولعدد الوحدات المعيبة المقبولة، وقد تم استعمال قيم المعلمات الثلاثة $(\delta, \lambda, \alpha)$ التي تم تقديرها من طريقة الامكان الاعظم ولبيانات العينة الفعلية في حساب دالة لتوزيع (CDF) ومن ثم ايجاد دالة خاصية التشغيل (OC)، اذ تم الحصول في قيم احتمالات القبول للمنتج ولجميع قيم (C)، فاذا كانت خطة المعاينة (n=55, C=4, a=1.5) ولبيانات مراقبة من النوع الاول بمعنى (r=42) فان الدفعة سوف تقبل باحتمال يساوي (1.0200e-016)، اما اذا كانت الوحدات المعيبة في العينة اكبر من (4) ترفض الدفعة ويجري فحص شامل للكمية المتبقية، وهكذا بالنسبة لبقية احتمالات القبول.

جدول رقم (2-4) يبين احتمال قبول الدفعة (OC) لخطط عينات القبول

طريقة التقدير	C			A
		1.0	1.5	2.0
OC_MLE	0	1.9077e-018	2.5216e-023	4.6753e-027
	1	1.3154e-016	2.5967e-021	6.3533e-025
	2	4.4272e-015	1.3052e-019	4.2141e-023
	3	9.6913e-014	4.2669e-018	1.8180e-021
	4	1.5513e-012	1.0200e-016	5.7351e-020
	5	1.9356e-011	1.9008e-015	1.4103e-018

وبتطبيق المعادلة (3-3) فان الجدول رقم (3-4) يبين اصغر حجم عينة ضروري لفحص المنتوج وعند نسبة بتر (a=1, 1.5, 2) بالنسبة لخطة عينات قبول المجموعة.

جدول رقم (3-4) يبين اصغر حجم عينة ضروري لفحص المنتوج لخطة عينات قبول المجموعة

P^*	r	C	A 1.0	1.5	2.0
0.50	2	0	1	1	1
	3	1	1	1	1
	4	2	1	1	1
	5	3	2	1	1
	6	4	3	2	1
	7	5	4	2	2
0.75	3	0	1	1	1
	4	1	1	1	1
	5	2	2	1	1
	6	3	2	1	1
	7	4	3	2	1
	8	5	4	2	2
0.95	4	0	1	1	1
	5	1	2	1	1
	6	2	2	2	1
	7	3	3	2	2
	8	4	3	2	2
	9	5	4	3	2

يتضح من الجدول (3-4) عندما يكون (P*=0.95, a=2) وعدد الوحدات المعيبة المسموح بها في العينة (C=0, 1, 2, 3, 4, 5) فان حجم العينة (n = k r) في (GASP) يكون (4, 5, 6, 14, 16, 18)، ويلاحظ عند زيادة قيم (r, c, a) فان احجام المجموعات تقل. وهكذا بالنسبة لبقية القيم الاخرى.

وبتطبيق المعادلة (3-3) فان الجدول رقم (4-4) يبين احتمال قبول الدفعة (OC) ولحجم عينة البيانات ولعدد الوحدات المعيبة المقبولة بالنسبة لخطة عينات قبول المجموعة، نلاحظ بان قيم خاصية التشغيل (OC) تقل عند زيادة نسبة القطع.

جدول رقم (4–4) يبين احتمال قبول الدفعة (OC) لخطة عينات قبول المجموعة

طريقة التقدير	r	k	C	A		
				1.0	1.5	2.0
	7	6	0	1.9077e-018	2.5216e-023	4.6753e-027
			1	4.3949e-012	6.4455e-016	6.3107e-019
			2	6.2738e-008	1.0209e-010	5.2783e-013
			3	2.6331e-005	4.7540e-007	1.2980e-008
			4	5.1561e-004	1.0329e-004	1.4892e-005
			5	4.7106e-004	1.0470e-003	7.9717e-004
	14	3	0	1.9077e-018	2.5216e-023	4.6753e-027
			1	2.3164e-014	1.0199e-018	4.3454e-022
OC_MLE			2	2.8151e-011	4.1285e-015	4.0422e-018
			3	7.9725e-009	3.8947e-012	8.7627e-015
			4	7.3370e-007	1.1939e-009	6.1727e-012
			5	2.5974e-005	1.4078e-007	1.6727e-009
	21	2	0	1.9077e-018	2.5216e-023	4.6753e-027
			1	2.2676e-015	6.6852e-020	2.1584e-023
			2	6.1120e-013	4.0189e-017	2.2596e-020
			3	6.6079e-011	9.6911e-015	9.4884e-018
			4	3.6067e-009	1.1798e-012	2.0115e-015
			5	1.1238e-007	8.1988e-011	2.4343e-013

الاستنتاجات (Conclusions)

1- بعد الحصول في مقدرات المعلمات الثلاثة لتوزيع (Lomax) باستعمال طريقة الامكان الاعظم، تم تحديد عدد القبول، عندما مخاطرة المستهلك (عند مستوى القبول (P*)) وكل معلمات الخطة كانت معلومة.

2- من الجدول (1-4) تم تحديد حجم العينة الضروري لفحص المنتوج ونلاحظ عند زيادة نسبة القطع (a) فان حجم العينة يقل، ومن الجدول (2-4) تم تحديد احتمال قبول الدفعة (OC) لخطط عينات القبول اذ يلاحظ تزايد احتمالات القبول كلما تصاعدت قيم (C).

3- من الجدول (3-4) تم تحديد حجم العينة الضروري لفحص المنتوج بالنسبة لخطة عينات القبول للمجموعة ونلاحظ عند زيادة نسبة القطع (a) فان حجم المجموعة يقل، ومن الجدول (4-4) تم تحديد احتمال قبول الدفعة (OC) لخطط عينات القبول اذ يلاحظ تزايد احتمالات القبول كلما تصاعدت قيم (C) .

5- المصادر (References)

[1]- الجنابي، ضوية سلمان (1991)، "استخدام اساليب اتخاذ القرار لبناء افضل نموذج لدالة الكلفة في السيطرة النوعية"، اطروحة دكتوراه، كلية الادارة والاقتصاد/بغداد.

[2]- الدوري، محمد صادق (2004)، "تصميم اسلوب للمعاينة البيزية المزدوجة مع تطبيق عملي"، اطروحة دكتوراه، كلية الادارة والاقتصاد/بغداد.

[3]- نعمان، انعام عبد الرحمن (2012)، "تصميم خطط عينات القبول للشركة العامة للصناعات الالكترونية باستخدام التوزيع الاسي العام"، اطروحة دكتوراه، كلية الادارة والاقتصاد/بغداد.

[4]- Ashour, S. K., Abdelfattah, A. M. and Mohamed, B. S. K.(2011), "parameter estimation of the hybrid censored lomax distribution", pak. Journal of statistic, vol. 7, No. 1, pp 1-19.

[5]- Aslam, M. and Jun, H. (2009), "A Group acceptance sampling plans for truncated life test based on the inverse Rayleigh and log-logistic distribution", pak. Journal of statistic, vol. 25, No. 2, pp 107-119.

[6]- Aslam, M. and Shahbaz, Q. M. (2007), "Economic Reliability test plans using the generalized exponential distribution", Journal of statistic, vol. 14, pp 53-60.

[7]- Rao, Srinivasa G. (2010), "A group acceptance sampling plans based on truncated life tests for Marshll-Olkin extended Lomax distribution", EJASA, Electron. J. App. Stat. Anal. Vol. 3, Issue 1, pp 18 – 27.