مقارنة طريقة الإمكان الأعظم مع طرائق أخرى لتقدير معلمة الشكل لتوزيع رايلي العام باستخدام المحاكاة

م. د.إسماعيل هادي جلوب م. د.ليلى مطر ناصر
الكلية التقنية الإدارية|بغداد كلية الهندسة /الجامعة المستنصرية

1- الملخص

يعد توزيع رايلي العام ذو المعلمتين من التوزيعات المهمة على صعيد الدراسات الأبحاث وله تطبيقات واسعة في مجال المعولية وتحليل دوال البقاء .

وفي هذا البحث تم تقدير معلمة الشكل لتوزيع رايلي العام من خلال طريقة المربعات الصغرى مع طريقة pct وقد اقترح الباحثان طريقتين ؛ الاولى هي اجراء تعديل على طريقة pct والاخرى هي طريقة بيز باعتماد دالة مرافقة طبيعية وهي التوزيع الاسي واعتمادة دالة خسارة تربيعية، وقد تم اختيار حجوم العينات (100،50،30،20،10) ،إذ أظهرت النتائج أنه عند قيم $\propto = 0.3$ الصغيرة يكون مجموع مربعات الخطا اقل من الحجوم الكبيرة لقيمة المعلمة

Abstract

Public distribution Generalized Rayleigh Distribution is a important parameters of distributions at the level of research studies and has wide applications in the field of reliability and scientific analysis functions remain .

In this research was estimated parameter format for the distribution of Rayleigh year through the method of least squares with the way pct The researcher suggested two ways first way is to reshuffle the way pct The second way is the way biz adoption function accompany normal is exponential distribution and adoption of function loss quadratic , has been selected sample sizes (100,50,30,20,10) , the as results showed that when the values of α = 0.3 is the sum of the squares small error less than large volumes to the value of the parameter

2-المقدمة وهدف البحث

ان توزيع (Rayleigh) هو توزيع ذو خواص جعلته ذا أهمية في كثير من مجالات الحياة ومن اهم خواصه هو ان الشدة (Magnitude) لاي متجه من القيم يكوناً مرتبط مع مركباته الاتجاهية (Directional component).

وكاحد المجالات التي يمكن تطبيقه بها هي عندما يراد تحليل سرعة الرياح (Wind velocity) تحلل على اساس ان اي مركبتين اتجاه متعامدين و باعتبار ان الشدة لاي مركبة تتوزع (Normal) وبقيم غير مرتبطة ذات تباين متساوي ووسط حسابي صفر وبهذا يتوزع توزيع (Rayleigh) وكذلك يمكن استخدامه في حالة الارقام المركبة العشوائية إذ ان مركباته الحقيقية والخيالية هي (i.i.d) وتتوزع (Gaussian) مع تباين متساوي ووسط حسابي صفر في هذه الحالة القيمة المطلقة للرقم المركب تتوزع توزيع (Rayleigh) [2] .

في عام 1993 قام A.F.Attia [3] بتقدير المعالم لتوزيع مزدوج من توزيع Rayleigh بالاعتماد على اسلوب Censoring .

وفي عام 2006 قام A.A.Soliman [2] بتقدير لنموذج مزدوج من توزيع Raleigh بالاعتماد على قيم محددة من المعالم بالاعتماد على اسلوب Progressively Censored data.

وفي عام 2008 قام M.Saleem and M.Aslam [7] بايجاد تحليل Bayesian لخليط من مركبتين ذات توزيع Rayleigh بالاعتماتد على توزيع uniform and Jeffrey كتوزيعات سابقة (Priors).

في عام 2012 قام Tahani A.Abnshal and Areej M.Al-Zaydi [11]بمعالجة مشاكل ايجاد M.LE والتقدير Bayesian في حالة (Point and interval) لمشاهدة مستقبلية لخليط من توزيع Rayleigh تحت رمز MTR (Mixture of two Rayleigh) بالاعتمكاد genevalized order statistics (GOS) وباعتماد اسلوب (MCMC) Monte carlo Markov chain والتوزيع السابق (Prior) استخدم لايجاد تحليل (Bayesian).

في عام 2013 قام Parvin Fathipour, Al-Alolh alaui and Hossein Jabbari khamne [9] باعتماد التقدير لـ R=P(Y<X) عندما يكون المتغيرين العشوائيين Y,X بخاصية المعلمتين نوع (Burr X) او بتوزيع(GRD) Generalized Rayleigh معالم القياس غير متساوية بافتراض

X~ GR (α,λ)

Y~ GR (β,δ)

باعتماد ان المتغيرين مستقلين و $\lambda \neq \delta$

ثم تم ايجاد تقديرات M.LE للمعالم باستخدام تكامل Simpson ثم تم ايجاد التقديرات باعتبار ان λ, δ متساوية.

وفي بحثنا هذا تم تقدير معلمة الشكل من اقتراح طريقتين هي التعديل على طريقة pct وطريقة بيز ومن خلال المحاكاة ولجوم عينات مختلفة اثبتت ان طريقة pct2 هي الافضل عند قيمة $\propto = 0.3$

3-طرائق التقدير

نفرض ان $x_1, x_2, \dots, x_n$ عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع بحجم n يتبع مفرداتة دالة كثافة احتمالية لتوزيع ريلي العام بإذ ان[1]

$$f(x,\propto,\lambda) = 2 \propto \lambda^2 x e^{-(\lambda x)^2}\left(1-e^{-(\lambda x)^2}\right)^{\propto-1} \qquad \dots 1$$

$$\propto > 0 \quad ,\lambda > 0 \,, x > 0$$

$$\propto: shap\ parameter$$

$$\lambda: scal\ parameter$$

3-1 طريقة الامكان الاعظم Maximum Likelihood Method

يمكن تقدير معلمة الشكل لتوزيع ريلي العام من المعادلة رقم 1 لدالة pdf ذو المعلمتين [5,6]

$$L(\propto, \lambda) = n \log \propto + 2n \log \lambda + \sum \log \lambda + \sum \log x_i - \lambda^2 \sum x_i^2 + (\propto - 1) \sum \log\left(1 - e^{-(\lambda x)^2}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \propto} = \frac{n}{\propto} + \sum \log\left(1 - e^{-(\lambda x)^2}\right) \qquad \ldots 2$$

ومن المعادلة رقم 2 واخذ المشتقة بالنسبة الى $\hat{\propto}$ نحصل على

$$\hat{\propto} = \frac{-n}{\sum \log\left(1 - e^{-(\lambda x)^2}\right)} \qquad \ldots 3$$

3-2 الطريقة الأخرى estimation based on percentiles

لأيجاد تقدير قيمة المعلمة بطريق pct نستخدم دالة التوزيع لتوزيع ريلي ذو المعلمتين

$$F(x, \propto, \lambda) = \left(1 - e^{-(\lambda x)^2}\right)^{\propto} \qquad \ldots 4$$

ومن المعادلة رقم 4 وبأخذ الجذر الى $\propto$ نستخرج المعادلة الأتية

$$-\frac{1}{\lambda^2} \log[1 - (F(x, \propto, \lambda))^{\frac{1}{\propto}}) = x^2 \qquad \ldots 5$$

لتكن $X_{(i)}$ احصاءة مرتبة بإذ ان $X_{(1)} < \cdots < X_{(n)}$

افرض ان

$$F(x_{(i)}, \propto, \lambda) = P_i$$

وللحصول على قيمة $\propto$ من المعادلة الأتية

$$\sum_{i=1}^{n} \left[x_{(i)}^2 + \frac{1}{\lambda^2} \log(1 - P_i^{\frac{1}{\propto}})\right]^2 \qquad \ldots 6$$

إذ ان $P_i = \frac{i}{n+1}$ وهي القيمة المتوقعة الى $F(x_{(i)}, \propto, \lambda)$، نفرض ان $\lambda = 1$

ومن المعادلة 4 نحصل على $\log F(x, \propto) = \propto \log\left(1 - e^{-x^2}\right)$ وبواسطة Obtained by minimizing نحصل على

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\log P_i - \propto \log\left(1 - e^{-x_{(i)}^2}\right)\right)^2 \qquad \ldots 7$$

ومن المعادلة 7 نشتق بالنسبة الى $\propto$ لنحصل على المقدر

$$\widehat{\propto}_{pce}=\frac{\sum_{i=1}^{n} \log p_i \log(1-e^{-x_{(i)}^2})}{\sum_{i=1}^{n}\left[\log(1-e^{-x_{(i)}^2})\right]^2} \qquad ...8$$

3-3 الطرائق المقترحة

3-3 -1 التعديل على طريقة pct

تم اقتراح الوزن الأتي وبالتعويض بالمعادلة رقم 8

$$P_i=\frac{i}{\sqrt{n+i}}$$

3-3-2 طريقة بيز

نفرض ان المرافقة الطبيعية هي توزيع الاسي exponential [10]

$$g(\theta)=B\,e^{\theta B}$$

إذ ان B معلمة التوزيع الاسي و θ تمثل المتغير العشوائي للتوزيع الاسي

إذ ان توزيع ريلي العام هو

$$f(x,\theta,\lambda)=2\theta\lambda^2 x e^{-(\lambda x)^2}(1-e^{-(\lambda x)^2})^{\theta-1}$$

لايجاد مقدر بيز نقوم بايجاد دالة حاصل الضرب لدالة P.d.f

$$\pi_{i=1}^{n} f(x,\theta,\lambda)=2^n\theta^n\lambda^{2n}\pi_{i=1}^{n}x_i e^{-(\lambda x)^2}\left(1-e^{-(\lambda x)^2}\right)^{n\theta-n}$$

ومن ثم ايجاد التوزيع اللاحق بعد ضرب قيمة المرافقة الطبيعية بدالة حاصل الضرب لنصل على المعادلة رقم 9

$$g(\theta/x)=\frac{B\,e^{\theta B}2^n\theta^n\lambda^{2n}\pi_{i=1}^{n}x_i e^{-(\lambda x)^2}\left(1-e^{-(\lambda x)^2}\right)^{n\theta-n}}{\int_0^{\infty}2^n\theta^n\lambda^{2n}\pi_{i=1}^{n}x_i e^{-(\lambda x)^2}\left(1-e^{-(\lambda x)^2}\right)^{n\theta-n}d\theta} \qquad ...9$$

ولأيجاد التوزيع اللاحق يجب ايجاد ناتج المقام في المعادلة 9

$$\int_0^{\infty}\theta^n e^{-\theta B}e^{n\theta\sum\log\left(1-e^{-(\lambda x)^2}\right)}d\theta \qquad ...10$$

ولأيجاد قيمة التكامل بالمعادلة 10 نقوم بالتحويلات الأتية $d=B-n\sum\log\left(1-e^{-(\lambda x)^2}\right)$ وبعد التعويض بالمعادلة 10 نحصل على

$$\int_0^{\infty}\theta^n e^{-\theta d}d\theta \qquad ...11$$

ومنها يكون ناتج التكامل في المعادلة رقم 11

$$=d^{-n-1}<(n+1) \qquad ...12$$

ومن المعادلة 12 والتعويض بالمعادلة 9 نحصل عل التوزيع اللاحق

$$g(\theta/x) = \frac{e^{-\theta B}\theta^{n}\left(1-e^{-(\lambda x)^{2}}\right)^{n\theta}}{\left(B-n\sum log\left(1-e^{-(\lambda x)^{2}}\right)\right)^{-(n+1)} < (n+1)} \quad ...13$$

ثم نقوم باختيار دالة خسارة تربيعية لايجاد مقدر بيز

$$\hat{\theta}_{Bay} = d^{-(n+1)}n!\int_{0}^{\infty}\theta^{n+1}e^{-\theta B}e^{n\theta\sum log\left(1-e^{-(\lambda x)^{2}}\right)}d\theta \quad ...14$$

وبعد اجراء التبسيط على المعادلة 14 نحصل على مقدر بيز في المعادلة 15

$$\hat{\theta}_{Bay} = \frac{\left(B-n\sum log\left(1-e^{-(\lambda x)^{2}}\right)\right)^{-(n+2)} < (n+2)}{\left(B-n\sum log\left(1-e^{-(\lambda x)^{2}}\right)\right)^{-(n+1)<(n+1)}} \quad ...15$$

B :معلمة التوزيع الاولي

λ : :معلمة القياس لتوزيع ريلي العام

$\hat{\theta}_{Bay}$: مقدر معلمة توزيع ريلي الى بيز

n:حجم العينة

Xi : عبارة عن المتغير لتوزيع ريلي العام

4- الجانب التجريبي

تم استخدام المحاكاة لغرض المقارنة بين الطرائق المختلفة تجريبيا ، إذ يتميز هذا الأسلوب بالمرونة ويوفر الكثير

من الوقت والجهد والمال وفيه يتم توليد البيانات نظريا من دون الحصول عليها عمليا وأيضا دون الإخلال بدقة النتائج

المطلوبة وتتلخص هذه الطريقة بالخطوات الأتية:

1- تحديد القيم الافتراضية: تم اختيار اربع حجوم للعينات هي(10, 20 50 , 100) وتم تثبيت قيم المعلمة بـ إذ ان

$\lambda = 1, 2, B = 1, 2$ واختيرت قيم للمعلمة المراد تقديرها وهي كما في الجدول الأتي :

2- توليد البيانات:

1- تم توليد قيم المتغير العشوائي x_i وفق طريقة التحويل العكسي وفق الصيغة الأتية[10]:

بما إن دالة cd.f لتوزيع ريلي العام هي:

$$F(x,\propto,\lambda) = \left(1-e^{-(\lambda x)^{\propto}}\right)$$

$$x = \sqrt{\frac{-1}{\frac{\lambda}{2}} log(1-u^{\frac{1}{\propto}})}$$

4 مقياس المقارنة:تم الاعتماد على مقياس متوسط مربعات الخطأ وفق الصيغة الأتية:

$$MSE(\widehat{\propto}) = \frac{\sum_{i=1}^{L}(\widehat{\propto}-\propto)^2}{L}$$

إذ إن:

L= عدد مرات التجربة

$\widehat{\propto}$=مقدر الطريقة المعتمدة

إذ تم تكرار التجربة إلى (1000) مرة

5-الاستنتاجات

1-اظهرت النتائج ان طريقة pct2 وعند قيمة $\alpha = 0.3$ هي الافضل في اغلب العينات

2-تبين من خلال الدراسة ان عند اختيار قيم الى معلمة التقدير يكون مجموع مربعات الخطا اقل عند القيم الصغيرة

3- بينت النتائج بان مقياس MSE يقل كلما زادت حجم العينة وهذا يتفق مع النظرية الإحصائية

6-التوصيات

1- يوصي الباحثان باستخدام طرق التقدير وحسب قيم MSE الافضل في جداول البحث

2- يوصي الباحثان بتوسيع نطاق الدراسة بتقدير معلمتي التوزيع بدون تثبيت قيم احدى المعلمات

7-الجداول

$$\lambda = 1, B = 1$$

$$\lambda = 1, \mathrm{B} = 1$$

n	method	$\propto= 0.3$	$\propto= 0.8$	$\propto= 1.3$	$\propto= 1.8$	$\propto= 2.3$
10	M.l.E	0.0131	0.1140	0.4892	0.5736	1.0238
	Pce1	0.0083	0.1621	0.5914	1.3703	2.3729
	Pce2	0.0050	0.0976	0.4148	1.0248	1.7960
	Basy	0.0129	0.0632	0.1628	0.2730	0.3269
20	M.l.E	0.0071	0.0313	0.0992	0.2443	0.3497
	Pce1	0.0060	0.1469	0.5559	1.1941	2.3455
	Pce2	0.0036	0.1103	0.4544	0.9965	2.0336
	Basy	0.0073	0.0265	0.0832	0.1165	0.2506

n	method	$\propto = 0.3$	$\propto = 0.8$	$\propto = 1.3$	$\propto = 1.8$	$\propto = 2.3$
50	M.l.E	0.0018	0.0134	0.0243	0.0427	0.0699
	Pce1	0.0016	0.0098	0.0286	0.0473	0.0862
	Pce2	0.0016	0.0098	0.0284	0.0435	0.0771
	Basy	0.0020	0.0133	0.0220	0.0365	0.0593
100	M.l.E	0.0013	0.0074	0.0121	0.0170	0.0699
	Pce1	0.0014	0.0100	0.0192	0.0277	0.0961
	Pce2	0.0014	0.0094	0.0177	0.0251	0.0908
	Basy	0.0014	0.0073	0.0117	0.0164	0.0647

$$\gimel = 2, B = 2$$

n	method	$\propto = 0.3$	$\propto = 0.8$	$\propto = 1.3$	$\propto = 1.8$	$\propto = 2.3$
10	M.l.E	0.0149	0.0781	0.2572	0.4592	0.6400
	Pce1	0.0129	0.0495	0.1559	0.3265	0.5964
	Pce2	0.0189	0.1058	0.2122	0.5473	0.8026
	Basy	0.0171	0.0679	0.1617	0.2177	0.3398
20	M.l.E	0.0060	0.0334	0.1491	0.2251	0.2510
	Pce1	0.0058	0.0199	0.1394	0.1310	0.2395
	Pce2	0.0069	0.0295	0.1751	0.1327	0.2676
	Basy	0.0067	0.0323	0.1204	0.1531	0.1610

$$\gimel = 2, B = 2$$

6-المصادر

n	method	$\propto = 0.3$	$\propto = 0.8$	$\propto = 1.3$	$\propto = 1.8$	$\propto = 2.3$
50	M.l.E	0.0028	0.0169	0.0484	0.1056	0.1098
	Pce1	0.0072	0.1170	0.4678	1.1117	2.1176
	Pce2	0.0058	0.1018	0.4245	1.0275	1.9829
	Basy	0.0027	0.0153	0.0398	0.0698	0.0602
100	M.l.E	0.0013	0.0057	0.0182	0.0411	0.0503
	Pce1	0.0044	0.1097	0.4554	1.1239	2.1528
	Pce2	0.0038	0.1020	0.4334	1.0819	2.0860
	Basy	0.0014	0.0055	0.0174	0.0408	0.0583

1-عبد الخالق النقيب الاء ماجد حمد (2009) تقدير معلمتي توزيع رالي العام بأستخدام تقنية المحاكاة ،الكلية التقنية الطبية بغداد،مجلة ابن الهيثم للعلوم الصرفة والتطبيقية المجلد 22 (4)

2- A. A. Soliman, "Estimators for the finite mixture of Rayleigh Model Based on Progressively Censored Data," Communications in Statistics—Theory and Methods, Vol. 35, No. 5, 2006, pp. 803-820. doi:10.1080/03610920500501379

3- A. F. Attia, "On Estimation for mixtures of 2Rayleigh Distribution with Censoring," Microelectronics Reliabil- ity, Vol. 33, No. 6, 1993, pp. 859-867. doi:10.1016/0026-2714(93)90259-2 .

4- Al-Nachawati,H. and Abu-Youssef,S.E.,(2009),"A Bayesian analysis of order statistics from the Generalized Rayleigh distribution ",Applied Mathematical sciences,vol.3,no.27,pp 1315-1325.

5- Chen, D.G., Lio,Y.L. and Tsai,T.R.,(2011),"Parameter Estimation for Generalized Rayleigh distribution under progressively type-I interval censored data', American open journal of statistics pp 46-57.

6-D.Kundu,D. and Raqab M., (2005)," Generalized Rayleigh Distribution: Different Methods of Estimations", Computational Statistics & Data Analysis, 49: 18.

7-Mahdi1, S. and Cenac M., (2006), "Estimating and Assessing the Parameters of the Logistic and Rayleigh Distributions from Three Methods of Estimation", Journal of Mathematical Computer Science, 13: 25-34

8- M. Saleem and M. Aslam, " Bayesian analysis of the Two Component Mixture of the Rayleigh Distribution Assuming the Uniform and the Jeffreys Priors," Journal of Applied Statistical Science, Vol. 16, No. 4, 2008, pp. 105-113.

9-Parvin Fathipour 1, Ali Abolhasani 2 and Hossein Jabbari Khamnei (2013)," Estimating R = P(Y <X) in the Generalized Rayleigh Distribution with Different Scale Parameters"Applied Mathematical Sciences, Vol. 7, 2013, no. 2, 87 – 92 Estimating R

10- Parvin Fathipour , Ali Abolhasani and Hossein Khamnei ,"Estimating R = P(Y <X) in the Generalized Rayleigh Distribution with Different Scale Parameters", Applied Mathematical Sciences, Vol. 7, 2013, no. 2, 87 – 92

11-Sanku Dey and Tanujit Dey,(2011)," Rayleigh Distribution Revisited via Extension Of Jeffrey's prior information and anew loss function ",Statistical Journal Volume 9, Number 3, November 2011, 213–226.

12- Tahani A. Abushal1, Areej M. Al-Zaydi2 ,"Prediction Based on Generalized Order Statistics from a Mixture of Rayleigh Distributions Using MCMC Algorithm", Open Journal of Statistics, 2012, 2, 356-367 doi:10.4236/ojs.2012.23044 Published Online July 2012 (http://www.SciRP.org/journal/ojs