تقدير بيز الحصين لمعلمة(β) للإمكان الأعظم الثاني لتوزيع فريچت القياسي مع دراسة تطبيقية لمرضى كورونا في محافظة كربلاء

Estimate Bayes Robust of a parameter(β) for the second maximum likelihood of the standard Frechet distribution With

An applied study of Corona patients in Karbala Governorate

أ.م.د. مهدي وهاب نعمة نصر الله **تمارا علي غني**

Dr.Mahdi Wahab Neaama Naser Allah **Tamara Ali Ghany**

Mahdi-na2002@yahoo.com tmaraly673@gmail.com

كلية الإدارة والإقتصـاد _ جامعة كربـلاء

Economics and Administration College - Karbala University

المستخلص:

جرى التطرق في هذا البحث الى تقدير معلمه القياس(B) لتوزيع فريجت Frechet Distribution باستعمال أسلوب بيز الحصين بالاعتماد على صنف الملوث للإمكان الاعظم الثاني (ML.II.ε) عند نوعين من التوزيع الاساس القياسي والتوزيـع الاساس الملوث وهي عندما يكون التوزيع الاساس القياسي والتوزيـع الملوث توزيـع كاما وعندما يكون التوزيـع الاساس القياسي والتوزيـع الاساس الملوث توزيع ليندلي عند داله خسارة تربيعية وتوصل الباحث عن طريق نتائج تحليل البيانات التطبيقية المتمثلة بأوقات البقاء(lifetimes) بالأيام تحت العلاج لحين الوفاة او الشفاء من المرض أو مغادرة المستشفى للمصابين بفايروس (COVID-19) تفوق التوزيع الاولي الملوث ليندلي والتأكيد على ضرورة استعماله لتقدير معلمات التوزيع الاساس القياسي توزيع فريجت مقارنة مع توزيع الملوث كاما.

الكلمات المفتاحية: صنف الامكان الاعظم الثاني (ML-II-ε),توزيع كاما, توزيع ليندلي.

Abstract: The study deals with the estimation of the parameter (B) of the Frechet distribution by using the hippocampal bay method depending on the pollutant class for the second greatest place (ML.II.ε) at two types of the standard base distribution and the contaminant base distribution, which is when the distribution is the standard basis and the contaminated distribution. The Kama distribution and when the standard baseline distribution and the contaminated base distribution is the Lindley distribution when a quadratic loss is indicative. The primary contaminant distribution is Lindley, and emphasizes that it should be used to estimate the parameters of the standard base distribution, the Freight distribution, compared to the pollutant gamma distribution.

Keywords: Great Possibility Class II (ML-II-), gama distribution, Lindley distribution

المقدمة:

قد تواجهنا الكثير من المواقف تكون فيها بعض المشاهدات في العينة قيد الدراسة تبتعد أو تشذ عن النسق الاصلي للبيانات , اما نتيجة لأخطاء القياس او نتيجة المعاينة الخاطئة ، او في بعض الاحيان يكون الباحث متعمداً ان تكون تلك المشاهدات الشاذة مضمنة في البيانات لأسباب بحثية ، ومن ثمَّ يمكن معاملة تلك البيانات على أنّها قيم شاذة (ملوثة) لذا تفقد المتغيرات العشوائية احد اهم الافتراضات الاساسية لها وهو تماثل واستقلال توزيع مفردات العينة (iid) , وكذلك اذا جرى تجاهل هذه القيم الشاذة في تقدير المعلمات فان تباين تلك المقدرات سيزداد ويؤدي الى تقديرات غير حصينة . ومن ثمَّ فأن تطبيق الطرائق الكلاسيكية مباشرة لتقدير معلمات التوزيع الاحتمالي لا يعطي تقديرات كفؤه ومن ثمَّ عدم الدقة في التقدير. وفي الوقت الحالي هنالك توجه كبير الى استعمال الطرائق الحصينة Robust Method للتخفيف من اثر الشواذ على البيانات والتي تستعمل بكثرة في النماذج الخطية , ولكن عندما يكون النموذج تحت الدراسة غير خطي وفيه درجة من التعقيد قد لا تؤدي تلك الطرائق الحصينة المطلوب منها ، اضافة الى أن الطرائق الحصينة تعد استراتيجيات وطرائق قائمة بحد ذاتها لا تعتمد على التوزيع الأصلي للبيانات ، مع انها لها فعالية في ايجاد تقديرات كفؤه لمعلمات التوزيع.

1.1 مشكلة البحث:

تعاني الكثير من البيانات في العالم الحقيقي من مشكلة شذوذ بعض المشاهدات او أنحرفها عن النمط الأصلي للمشاهدات الموجودة معها والتي غالبا ما يطلق على تلك المشاهدات المنحرفة تسميه شواذ Outliers او ملوثات(Contaminations) والتي في حالة وجودها ضمن البيانات او ضمن توزيع البيانات او نتيجة الحصول على معلومات اولية غير كاملة او غير دقيقة فأن استعمال الطرائق الاعتيادية مثل الامكان الاعظم او طريقة العزوم.......الخ لا تعطي مقدرات كفؤه لذلك لابد من استخدام طرائق تقودنا الى تقديرات كفؤه لمعلمات ذلك المجتمع الاحصائي التي تنتمي اليه البيانات ومن تلك الطرائق هي طرائق بيز الحصينة التي تتعامل مع وجود الشواذ في البيانات وتعود الى تقديرات ذات كفاءة عالية مقارنه بالتقديرات الكلاسيكية في حالة وجود القيم الشاذة.

1.2 هدف البحث:

يهدف البحث الى تقدير معلمة القياس لتوزيع فريجت باستعمال اسلوب بيز الحصين بالاعتماد على صنف الملوث(ML.II.ε) عند توزيع الاساس القياسي فريجت والتوزيع الاساس الملوث كاما ,وعندما يكون توزيع الاساس القياسي فريجت والتوزيع الملوث ليندلي عند دالة خسارة تربيعية,.

1-3 توزيع كاما

يعدُّ توزيع كاما واحد من التوزيعات المتصلة الشائعة الاستخدام في التطبيق, عرف من قبل الباحثة Stacy(1962) فقد عُدَّ هذا التوزيع اساسا لعدد من التوزيعات الأخرى وخاصة التوزيعات الخاصة بدراسة زمن الحياة .ويستعمل توزيع كاما في قياس المهل الزمنية كمأمول العمر وأوقات الانتظار لدى المطاعم او مكاتب الخدمات وحتى حجز قنوات الاتصال, حيث إنَّ دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كاما هي:

$$f(x,\alpha,\beta)=\frac{1}{\Gamma\alpha\,\beta^{\alpha}}\,x^{\alpha-1}\,e^{-\frac{x}{\beta}}\quad x\geq 0\quad \alpha,\beta>0 \qquad \ldots(2)$$

حيث ان α معلمة الشكل , β معلمة القياس

ولتوزيع كاما ذي المعلمتين متوسط وتباين هما على التوالي:

$$Ex=\alpha\beta$$

$$V(x)=\alpha\beta^{2}$$

اما دالة التوزيع التجميعي (التراكمي) لتوزيع كاما هي:

$$F(x,\alpha,\beta)=\int_0^x f(u,\alpha,,\beta)du=\frac{\gamma(\alpha,\frac{x}{\beta})}{\Gamma\alpha} \qquad \ldots(3)$$

حيث ان $\gamma(\alpha,\frac{x}{\beta})$ دالة كاما المنقوصة(الدنيا).

4-1توزيع ليندلي:

يعد توزيع ليندلي (Distribution Lindley) أحد التوزيعات المستمرة المهمة التي تمتاز بإمكانية كبيرة في تمثيل الانظمة المختلفة التي تتألف من مجتمعات مركبة وغير متجانسة وكذلك المرونة العالية لهذا التوزيع كأنموذج للفشل.ويعد توزيع ليندلي من التوزيعات المختلطة الناتجة من خلط متغيرين عشوائيين احدهما يتبع التوزيع الأسي بمعلمة قياس (θ) والثاني يتبع توزيع كاما بمعلمتي شكل وقياس (θ) و (α) على التوالي لتكوّنان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ليندلي بمعلمتين كالآتي:

$$\ldots(4)\mathrm{f}(\mathrm{x},\alpha,\theta)=\frac{\theta^{2}}{\alpha\theta+1}(\alpha+\mathrm{x})\mathrm{e}^{-\theta\mathrm{x}}\quad ;\ \mathrm{x}>0\,,\theta>0,\ \alpha\theta>0$$

وإنّ دالة الاحتمال التراكمي لتوزيع ليندلي تكتب كالآتي:

$$\mathrm{F}(\mathrm{x},\alpha,\theta)=1-[\frac{1+\alpha\theta+\theta X}{\alpha\theta+1}\mathrm{e}^{-\theta\mathrm{x}}]\quad ;\ \mathrm{x}>0\,,\theta>0,\ \alpha\theta>0$$

(Shanker & Fesshay, 2016, P2)

2- تقدير بيز الحصين لمعلمة القياس (B) لتوزيع فريجيت باستعمال صنف التلوث الإمكان الاعظم النوع الثاني الملوث ML.II.ε:

2.1 تقدير معلمة القياس β عندما يكون التوزيع الاساس القياسي والتوزيع الملوث القياسي توزيع كاما Gamma Distribution

بعدُّ معلمة الشكل α معلومة سيجري تقدير معلمة القياس β باستعمال اسلوب بيز الحصين بالاعتماد على صنف التوزيع الأولي الملوث الامكان الاعظم النوع الثاني وكالآتي:

$$\dots(5)\Gamma = \{\pi(\beta) : q(\beta) = (1-\varepsilon)q_0(\beta) + \varepsilon q(\beta)\}$$

إذ إن :

$q_0(\beta)$: المعلومات الأساسية المسبقة القياسية

$q(\beta)$: المعلومات الملوثة المسبقة القياسية

ε : نسبة التلوث

وتتوفر لدى الباحثة المعلومات الأتية :

$q_0(\beta/\sigma_0)$ ~ *Gamma*($\alpha=1, \sigma_0$)

$$q_{\text{Gamma }0}(\beta/\sigma_0) = f(\beta, \sigma_0) = \frac{1}{\sigma_0} e^{-\frac{\beta}{\sigma_0}} \quad \dots (6)$$

$q(\beta/\sigma)$ ~ *Gamma* ($\alpha=1, \sigma$)

$$q_{\text{Gamma}}(\beta/\sigma) = f(\beta, \sigma) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{\beta}{\sigma}} \quad \dots (7)$$

إن التوزيع الاساسي المراد تقدير معلماته هو توزيع فريجت بدالة الكثافة الاحتمالية الآتية:

$$f(x, \alpha, \beta) = \alpha\beta\, x^{-(\alpha+1)} \exp(-\beta x^{-\alpha})$$

لذلك فأن دالة الامكان تكون بالصيغة الآتية:

$$L(x_i, \alpha, \beta) = \alpha^n \beta^n \prod_{i=1}^n x^{-(\alpha+1)} \exp(-\beta \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha})$$

والان نقوم بإيجاد الدالة الحدية التي تقابل التوزيع الاحتمالي للبيانات الأصلية X بوجود المعلومات المسبقة الملوثة للمعلمة β وكالآتي:

$$M_{GammaF}(X/q) = \int_0^\infty L(x/\beta)\, q(\beta/x) d\beta$$

$$= \int_0^\infty \alpha^n \beta^n \prod_{i=1}^n x^{-(\alpha+1)} e^{(-\beta \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha})} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{\beta}{\sigma}} d\beta$$

$$= \frac{\alpha^n \prod_{i=1}^n x^{-(\alpha+1)} \Gamma(n+1)}{\sigma(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} - \sigma)^{n+1}} \quad \dots(2-48)$$

والآن نقوم بتعظيم الدالة الحدية $M_{GammaF}(X/q)$ للحصول على مقدر جديد لـ σ وكالآتي:

$$\frac{dM_{GammaF}(X/q)}{d\sigma}$$

$$= \alpha^n \prod_{i=1}^n x^{-(\alpha+1)} \Gamma(n + 1) \left[\frac{(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} - \sigma)^{n+1} - \sigma(n+1)(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} - \sigma)^n}{(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} - \sigma)^{2(n+1)}}\right]$$

وباستخراج عامل مشترك $(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma)^n$ ومساواة $\frac{dM_{WeF}(X/q)}{d\sigma}$ بالصفر نحصل على :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \hat{\sigma}\right)^n \left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \hat{\sigma}\right) - (n+1)\hat{\sigma}\right] = 0$$

اما المقدار $(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \hat{\sigma})^n = 0$ وهذا لايجوز لأن هذا المقدار اكبر من الصفر

$$\therefore \left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \hat{\sigma}\right) - (n+1)\hat{\sigma}\right) = 0 \Longrightarrow$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \hat{\sigma} - n\hat{\sigma} - \hat{\sigma}\right) = 0 \qquad \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - 2\hat{\sigma} - n\hat{\sigma} = 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \hat{\sigma}(n+2) = 0$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}}{n+2} \qquad \ldots(8)$$

وعليه نستبدل σ بـ $\hat{\sigma}$ في التوزيع المسبق الملوث الأساس لـ β لنحصل على :

$$q_{GammaF}(\beta/\sigma) = \begin{cases} \frac{n+2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}} e^{-\beta \frac{n+2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}}} & if \quad \sigma_0 < \hat{\sigma} \\ q_{Gamma0F}(\beta/\sigma_0) & if \quad \sigma_0 \geq \hat{\sigma} \end{cases} \quad \ldots (9)$$

وعليه يكون التوزيع المختلط السابق للمعلمة β باستعمال مقدر الامكان الأعظم النوع الثاني كما يأتي:

$$\hat{\pi}_{GammaF}(\beta) = (1-\varepsilon) q_{GammaF0}(\beta) + \varepsilon q_{GammaF}(\hat{\sigma}) \qquad \ldots(10)$$

∴ التوزيع اللاحق للمعلمة β باستعمال مقدر الامكان الأعظم النوع الثاني هو :

$$\hat{\pi}^*_{GammaF}(\beta) = \hat{\lambda} q^*_{Gamma0F}(\beta/\sigma_0) + (1-\hat{\lambda}) q^*_{GammaF}(\beta/\hat{\sigma})$$

وسيجري ايجاد الوزن اللاحق باستعمال مقدر الامكان الاعظم النوع الثاني كالآتي:

$$\hat{\lambda}_{GammaF} = \frac{(1-\varepsilon) M_{Gamma0F}(X/q_0(\beta))}{(1-\varepsilon) M_{Gamma0F}(X/q_0(\beta)) + \varepsilon M_{GammaF}(X/\hat{q}(\theta))}$$

او يمكن ان يكتب بشكل آخر وكالآتي:

$$\hat{\lambda}_{WeF} = \left[1 + \frac{\varepsilon M_{GammaF}(X/\hat{q}(\theta))}{(1-\varepsilon) M_{Gamma0F}(X/q_0(\beta))}\right]^{-1}$$

$$= \left[1 + \frac{\varepsilon \frac{\alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)} \Gamma(n+1)}{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}}{n+2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}}{n+2}\right)^{n+1}}}{(1-\varepsilon)\frac{\alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)} \Gamma(n+1)}{\sigma_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0\right)^{n+1}}}\right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{(1-\varepsilon)\frac{\alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)} \Gamma(n+1)}{\sigma_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0\right)^{n+1}}}{(1-\varepsilon)\frac{\alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)} \Gamma(n+1)}{\sigma_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0\right)^{n+1}}} + \frac{\varepsilon \frac{\alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)} \Gamma(n+1)}{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}}{n+2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}}{n+2}\right)^{n+1}}}{(1-\varepsilon)\frac{\alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)} \Gamma(n+1)}{\sigma_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0\right)^{n+1}}}\right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{\left(\sigma_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0\right)^{n+1}\right)\left[(1-\varepsilon)\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}}{n+2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}}{n+2}\right)^{n+1}\right) + \varepsilon\alpha^n\left(\sigma_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0\right)^{n+1}\right)\right]}{(1-\varepsilon)\left(\sigma_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0\right)^{n+1}\right)\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}}{n+2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}}{n+2}\right)^{n+1}\right)}\right]^{-1}$$

∴

$$\hat{\lambda}_{GammaF} =$$

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\left(\sigma_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}-\sigma_0\right)^{n+1}\right)\left[(1-\varepsilon)\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}}{n+2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}}{n+2}\right)^{n+1}\right)+\varepsilon\alpha^n\left(\sigma_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}-\sigma_0\right)^{n+1}\right)\right]}{(1-\varepsilon)\left(\sigma_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}-\sigma_0\right)^{n+1}\right)\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}}{n+2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}}{n+2}\right)^{n+1}\right)}\right]^{-1} & if \quad \sigma_0 < \hat{\sigma} \quad \dots (11) \\ (1-\varepsilon) & if \quad \sigma_0 \geq \hat{\sigma} \end{cases}$$

و من ثم نجد التوزيع اللاحق الاساس $q^*{}_{Gamma0F}(\beta/\sigma_0)$ للمعلمة β كالآتي:

$$q^*{}_{Gamma0F}(\beta/\sigma_0) = \frac{L\,(x/\beta)q_0(\beta/\sigma_0)}{M(X/q_0(\beta))}$$

$$= \frac{\alpha^n\beta^n \prod_{i=1}^{n} x^{\,-(\alpha+1)}\, e^{\left(-\beta\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}\right)}\,\frac{1}{\sigma_0}\, e^{-\frac{\beta}{\sigma_0}}}{\dfrac{\alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{\,-(\alpha+1)}\Gamma(n+1)}{\sigma_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}-\sigma_0\right)^{n+1}}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n+1)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}-\sigma_0}\right)^{n+1}}\,\beta^{(n+1)-1}\, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}-\sigma_0\right)}}} \quad \dots(12)$$

$$\sim Gamma\left((n+1), \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}-\sigma_0}\right)$$

ونلاحظ ان التوزيع اللاحق للتوزيع المسبق الاساس هو دالة كاما بالمعلمتين

$\alpha = (n+1)$ و $\beta = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}-\sigma_0}$ وهو دالة احتمالية مجال تكاملها يساوي الواحد الصحيح

وبالطريقة نفسها نوجد التوزيع اللاحق للتوزيع الملوث لنحصل على :

$$q^*{}_{GammaF}(\beta/\sigma) = \frac{L\,(x/\beta)q(\beta/\sigma)}{M(X/q(\beta))}$$

$$= \frac{\alpha^n\beta^n \prod_{i=1}^{n} x^{\,-(\alpha+1)}\, e^{\left(-\beta\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}\right)}\,\frac{1}{\sigma}\, e^{-\frac{\beta}{\sigma}}}{\dfrac{\alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{\,-(\alpha+1)}\Gamma(n+1)}{\sigma\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}-\sigma\right)^{n+1}}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n+1)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}-\sigma}\right)^{n+1}}\;\beta^{(n+1)-1}\, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}-\sigma\right)}}} \quad \dots(13)$$

$$\sim Gamma\left((n+1), \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}-\sigma},\right)$$

ونلاحظ أن التوزيع اللاحق للتوزيع المسبق الملوث هو دالة كامــا بالمعلمتين

$\alpha = (n+1)$ و $\beta = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}-\sigma}$ وهو دالة احتمالية مجال تكاملها يساوي الواحد الصحيح

ولإيجاد مقدر بيز للمعلمة β في ظل دالة خسارة تربيعية يكون كالآتي:

$$Eq^*{}_{Gamma0F}(\beta) = \int_0^{\infty} \beta\, q^*{}_{Gamma0F}(\beta)\, d\beta$$

$$= \int_0^{\infty} \beta \quad \beta^{(n+1)-1}\, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}-\sigma_0\right)}}}\, d\beta$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n+1)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}-\sigma_0}\right)^{n+1}} \int_0^{\infty} \beta^{(n+1)-1+1}\, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}-\sigma_0\right)}}}\, d\beta$$

$$= \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0)^{n+1}(n+1)\Gamma(n+1)}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0)^{n+2}\Gamma(n+1)}$$

$$= \frac{(n+1)(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} -)^{n+1}}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0)^{n+2}}$$

$$= \frac{(n+1)}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0)} \qquad \ldots(14)$$

وبالطريقة نفسها نوجد مقدر بيز للمعلمة β عند دالة خسارة تربيعية للتوزيع الملوث وكالآتي:

$$Eq^{*}_{GammaF}(\beta) = \int_0^{\infty} \beta\, q^{*}_{GammaF}(\beta) d\beta$$

$$= \int_0^{\infty} \beta \ \ \beta^{(n+1)-1}\, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}-\sigma)}}} d\beta$$

$$= \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma)^{n+1}(n+1)\Gamma(n+1)}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma)^{n+2}\Gamma(n+1)}$$

$$= \frac{(n+1)(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0)^{n+1}}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma)^{n+2}}$$

$$= \frac{(n+1)}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma)} \qquad \ldots(15)$$

وعليه يكون مقدر بيز الحصين للمعلمة β للتوزيع اللاحق المختلط في ظل دالة خسارة تربيعية كالآتي:

$$\therefore E\hat{\pi}^{*}_{GammaF}(\beta) = \begin{cases} \hat{\lambda}\frac{(n+1)}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}-\sigma_0)} + (1-\hat{\lambda})\frac{(n+1)}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}-\sigma)} & if \quad \sigma_0 < \hat{\sigma} \\ \frac{(n+1)}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}-\sigma_0)} & if \quad \sigma_0 \geq \hat{\sigma} \end{cases} \ldots (16)$$

ونلاحظ من معادلة (16) انه لا يمكن حلها بالطرائق التحليلية الاعتيادية لكونها معادلة غير خطية لذلك سيجري الطرائق التكرارية وهي طريقة نيوتن رافسون في ايجاد مقدر بيز الحصين للمعلمة ($\hat{\beta}_{GammaFR.Bayes}$) .

2-2 تقدير معلمة القياس β عندما يكون التوزيع الاساس القياسي والتوزيع الملوث القياسي توزيع ليندلي Lindley Distribution :

بعدّ معلمة الشكل α معلومة سيجري تقدير معلمة القياس β باستعمال اسلوب بيز الحصين بالاعتماد على صنف التوزيع الأولي الملوث الامكان الاعظم النوع الثاني وكالآتي:

$$\ldots(17)\Gamma = \{\pi(\beta): q(\beta) = (1-\varepsilon)q_0(\beta) + \varepsilon q(\beta)\}$$

إذ إن :

$q_0(\beta)$: المعلومات الأساسية المسبقة القياسية

$q(\beta)$: المعلومات الملوثة المسبقة القياسية

ε : نسبة التلوث

وتتوفر لدى الباحثة المعلومات الأتية :

$q_0(\beta/\sigma_0)$ ~ *Lindley Distribution* $(\alpha=1, \sigma_0)$

$$q_{\text{Lindley }0}(\beta/\sigma_0) = f(\beta,\sigma_0) = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0+1}(\beta+1)e^{-\sigma_0\beta}$$

$q(\beta/\sigma)$ ~ *Lindley Distribution* $(\alpha=1, \sigma)$

$$q_{\text{Lindley}}(\beta/\sigma) = f(\beta,\sigma) = \frac{\sigma^2}{\sigma+1}(\beta+1)e^{-\sigma\beta}$$

إن التوزيع الاساسي المراد تقدير معلماته هو توزيع فريچت بدالة الكثافة الاحتمالية الآتية:

$$f(x,\alpha,\beta) = \alpha\beta\, x^{-(\alpha+1)} \exp(-\beta x^{-\alpha})$$

لذلك فأن دالة الامكان تكون بالصيغة الآتية:

$$L(x_i,\alpha,\beta) = \alpha^n\beta^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)} \exp\left(-\beta \sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}\right)$$

والان نقوم بإيجاد الدالة الحدية التي تقابل التوزيع الاحتمالي للبيانات الأصلية X بوجود المعلومات المسبقة الملوثة للمعلمة β وكالآتي:

$$M_{\text{Lindley}F}(X/q) = \int_0^\infty L(x/\beta)\, q(\beta/x)\, d\beta$$

$$= \int_0^\infty \alpha^n\beta^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\, e^{(-\beta\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha})} \left(\frac{\sigma^2}{\sigma+1}\right)(\beta+\mathbf{1})\boldsymbol{e}^{-\sigma\beta} d\beta$$

$$= \left[\left(\frac{\sigma^2}{\sigma+1}\right) \alpha^n \Gamma(n+1) \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\right] [((\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} + \sigma)^{n+1}) \left(\frac{(n+1)+(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)^{n+2}(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)^{n+1}}\right)]$$

$$= \left[\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{n}+\mathbf{1})\, \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{n}} \prod_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \mathbf{x}^{-(\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1})}\, [(\frac{\boldsymbol{\sigma}^2}{\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{1}})\right] [\frac{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i^{-\alpha}+\boldsymbol{\sigma})}{(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i^{-\alpha}+\boldsymbol{\sigma})^{n+2}}]] \qquad \dots (18)$$

والآن نقوم بتعظيم الدالة الحدية $M_{\text{Lindley}F}(X/q)$ للحصول على مقدر جديد لـ σ وكالآتي:

$$\frac{dM_{\text{Lindley}F}(X/q)}{d\sigma}$$

$$= \left[\Gamma(n+1)\, \alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\right] \left[\left(\frac{\sigma^2}{\sigma+1}\right)\left[\frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)^{n+2} - ((n+1)+(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)).(n+2)(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)^{n+1}}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)^{2(n+2)}}\right]\right]$$
$$+ \left[\frac{(n+1)+(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)^{n+2}}\right].\left(\frac{\sigma(\sigma+2)}{(\sigma+1)^2}\right)]$$

$$= \left[\Gamma(n+1)\, \alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\right] \left[\frac{[(\sigma+1)^2(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)][\sigma^2[1-(n+1)(n+2)-(n+2)(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)]+[(\sigma+1)][(\sigma(\sigma+2))[(n+1)+(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)]]}{(\sigma+1)(\sigma+1)^2(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)^{n+2}}\right]$$

$$= \left[\Gamma(n+1)\, \alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\right] \left[\frac{[(\sigma+1)[(\sigma+1)(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)][\sigma^2[1-(n+1)(n+2)-(n+2)(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)]+[(\sigma(\sigma+2))[(n+1)+(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)]]}{(\sigma+1)(\sigma+1)^2(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)^{n+2}}\right]$$

$$= \left[\Gamma(n+1)\, \alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\right] \left[\frac{[[(\sigma+1)(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)][\sigma^2[1-(n+1)(n+2)-(n+2)(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)]+[(\sigma(\sigma+2))[(n+1)+(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)]]}{(\sigma+1)^2(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)^{n+2}}\right]$$

$$= \left[\Gamma(n+1)\, \alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\right] \left[\frac{[[(\sigma+1)][\sigma^2[1-(n+1)(n+2)-(n+2)(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)]+\left[\frac{(\sigma(\sigma+2))}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)}[(n+1)+(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)]\right]}{(\sigma+1)^2(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)^{n+1}}\right]$$

$$[[(\hat{\sigma}+1)][\hat{\sigma}^2[1-(n+1)(n+2)-(n+2)(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\hat{\sigma})]+\left[\frac{(\hat{\sigma}(\hat{\sigma}+2))}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\hat{\sigma})}[(n+1)+(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\hat{\sigma})]\right]=0 \quad \dots(19)$$

نلاحظ أنَّ المعادلة(19)لا يمكن حلها بالطرائق التحليلية الاعتيادية لإيجاد مقدر $\hat{\sigma}$ لذلك سيجري استعمال طريقة نيوتن رافسون التكرارية لايجاد جذر المعادلة وتعويض النتيجة في التوزيع الملوث الاساس لـ β.

وعليه نستبدل σ بـ $\hat{\sigma}$ في التوزيع المسبق الملوث الأساس لـ β لنحصل على :

$$q_{\text{LindleyF}}(\beta/\sigma)=\begin{cases}\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}+1}(\beta+1)e^{-\beta\hat{\sigma}} & if \quad \sigma_0<\hat{\sigma}\\ q_{\text{LindleyF}}(\beta/\sigma_0) & if \quad \sigma_0\geq\hat{\sigma}\end{cases} \quad (20)$$

وعليه يكون التوزيع المختلط السابق للمعلمة β باستعمال مقدر الامكان الأعظم النوع الثاني كما يأتي:

$$\hat{\pi}_{\text{Lindley}F}(\beta)=(1-\varepsilon)q_{\text{LindleyF0}}(\boldsymbol{\beta})+\varepsilon q_{\text{LindleyF}}(\hat{\sigma}) \quad \dots(21)$$

∴ التوزيع اللاحق للمعلمة β باستعمال مقدر الامكان الأعظم النوع الثاني هو :

$$\hat{\pi}^*_{\text{Lindley}F}(\beta)=\hat{\boldsymbol{\lambda}}q^*_{\text{Lindley}0F}(\beta/\sigma_0)+(1-\hat{\boldsymbol{\lambda}})q^*_{\text{Lindley}F}(\beta/\hat{\sigma})$$

وسيجري ايجاد الوزن اللاحق باستعمال مقدر الامكان الاعظم النوع الثاني كالآتي:

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\text{Lindley}F}=\frac{(1-\varepsilon)M_{\text{Lindley}0F}(X/q_0(\beta))}{(1-\varepsilon)M_{\text{Lindley}0F}(X/q_0(\beta))+\varepsilon M_{\text{Lindley}F}(X/\hat{q}(\theta))}$$

او يمكن أن يكتب بشكل آخر وكالآتي:

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\text{Lindley}F}=\left[1+\frac{\varepsilon M_{\text{Lindley}F}(X/\hat{q}(\theta))}{(1-\varepsilon)M_{\text{Lindley}0F}(X/q_0(\beta))}\right]^{-1}=\left[1+\frac{\left[\Gamma(n+1)\,\alpha^n\prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}[(\frac{(\hat{\sigma})}{(\hat{\sigma})+1})\right][\frac{(n+1)+(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+(\hat{\sigma}))}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+(\hat{\sigma})\right)^{n+2}}]]}{\left[\Gamma(n+1)\,\alpha^n\prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}[(\frac{\sigma_0}{\sigma_0+1})\right][\frac{(n+1)+\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0\right)^{n+2}}]]}\right]^{-1}$$

$$\therefore\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\text{Lindley}F}=\begin{cases}\left[1+\frac{\left[[(\frac{(\hat{\sigma})}{(\hat{\sigma})+1})\right][\frac{(n+1)+(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+(\hat{\sigma}))}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+(\hat{\sigma})\right)^{n+2}}]]}{\left[[(\frac{\sigma_0}{\sigma_0+1})\right][\frac{(n+1)+\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0\right)^{n+2}}]]}\right]^{-1} & if \quad \sigma_0<\hat{\sigma}\\ (1-\varepsilon) & if \quad \sigma_0\geq\hat{\sigma}\end{cases} \quad \dots(22)$$

و من ثم نجد التوزيع اللاحق الاساس $q^*_{0F}(\beta/\sigma_0)$ للمعلمة β كالآتي:

$$q^*_{\text{Lindley}0F}(\beta/\sigma_0)=\frac{L(x/\beta)q_0(\beta/\sigma_0)}{M(X/q_0(\beta))}$$

$$=\frac{\alpha^n\prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\;e^{(-\beta\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha})}\left(\frac{\sigma_0^{\,2}}{\sigma_0+1}\right)(\beta+\mathbf{1})\boldsymbol{e}^{-\sigma_0\beta}}{\left[\boldsymbol{\Gamma(n+1)\,\alpha^n\prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}}\,[(\frac{\sigma_0^{\,2}}{\sigma_0+\mathbf{1}})\right][\frac{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i^{-\alpha}+\sigma_0)}{(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i^{-\alpha}+\sigma_0)^{n+2}}]]}$$

$$=\frac{\beta^{n+1}e^{-\beta(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma_0)}+\beta^{n}e^{-\beta(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma_0)}}{\Gamma(n+1)\left[\frac{(n+1)+(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma_0)}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma_0)^{n+2}}\right]}$$

$$=\frac{\sigma\beta^{n}(\beta+\mathbf{1})e^{(-\beta\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha})}\,\boldsymbol{e}^{-\sigma_0\beta}}{\Gamma(n+1)\ \left[\frac{(n+1)+(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma_0)}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma_0)^{n+2}}\right]}$$

$$\frac{\beta^{n}(\beta+\mathbf{1})e^{(-\beta\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha})}\,\boldsymbol{e}^{-\sigma_0\beta}}{\Gamma(n+2)\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma_0)^{n+2}}+\Gamma(n+1)\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma_0)^{n+1}}}$$

$$=\frac{\beta^{n+1}e^{\frac{-\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma_0)}}}+\beta^{n}e^{\frac{-\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma_0)}}}}{\Gamma(n+2)\left(\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma_0)}\right)^{n+2}+\Gamma(n+1)\left(\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma_0)}\right)^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(2n+3)\left(\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma_0)}\right)^{2n+3}}\beta^{2n+4}e^{\frac{-\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma_0)}}}+\beta^{n}e^{\frac{-\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma_0)}}}\ \ldots(23)$$

$$\sim \textit{Gamma}\ \left((2n+3),\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\sigma_0}\right)$$

ونلاحظ ان التوزيع اللاحق للتوزيع المسبق الاساس هو دالة كاما بالمعلمتين

$\alpha=(2n+3)$ و $\beta=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\sigma_0}$ وهو دالة احتمالية مجال تكاملها يساوي الواحد الصحيح .

وبالطريقة نفسها نوجد التوزيع اللاحق للتوزيع الملوث لنحصل على :

$$q^{*}{}_{\mathrm{Lindley}F}(\beta/\sigma)=\frac{L\,(x/\beta)q(\beta/\sigma)}{M(X/q(\beta))}$$

$$=\frac{\alpha^{n}\ \prod_{i=1}^{n}x^{\ -(\alpha+1)}\ e^{(-\beta\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha})}\left(\frac{\sigma^2}{\sigma+1}\right)(\beta+\mathbf{1})\boldsymbol{e}^{-\sigma\beta}}{\left[\boldsymbol{\Gamma(n+1)\ \alpha^{n}\prod_{i=1}^{n}x^{\ -(\alpha+1)}}\ [(\frac{\sigma^2}{\sigma+\mathbf{1}})\ ]\ [\frac{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i^{-\alpha}+\sigma)}{(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i^{-\alpha}+\sigma)^{n+2}}]\right]}$$

$$=\frac{\beta^{n}(\beta+\mathbf{1})e^{(-\beta\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha})}\,\boldsymbol{e}^{-\sigma\beta}}{\Gamma(n+1)\ \left[\frac{(n+1)+(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma)}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma)^{n+2}}\right]}$$

$$=\frac{\beta^{n}(\beta+\mathbf{1})e^{(-\beta\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha})}\,\boldsymbol{e}^{-\sigma\beta}}{\Gamma(n+2)\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma)^{n+2}}+\Gamma(n+1)\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma)^{n+1}}}$$

$$=\frac{\beta^{n+1}e^{\frac{-\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma)}}}+\beta^{n}e^{\frac{-\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma)}}}}{\Gamma(n+2)\left(\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma)}\right)^{n+2}+\Gamma(n+1)\left(\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma)}\right)^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(2n+3)\left(\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma)}\right)^{2n+3}}\beta^{2n+4}e^{\frac{-\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma)}}}+\beta^{n}e^{\frac{-\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma)}}}\quad\ldots(24)$$

$$\sim \textit{Gamma}\left((2n+3),\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\sigma}\right)$$

ونلاحظ ان التوزيع اللاحق للتوزيع المسبق الاساس هو دالة كاما بالمعلمتين

$\alpha=(2n+3)$ و $\beta=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\sigma}$ وهو دالة احتمالية مجال تكاملها يساوي الواحد الصحيح .

ولإيجاد مقدر بيز للمعلمة β في ظل دالة خسارة تربيعية يكون كالآتي:

$$Eq^*_{\text{Lindley}0F}(\beta)=\int_0^\infty \beta\, q^*_{\text{Lindley}0F}(\beta)d\beta$$

$$=\int_0^\infty \beta\ \ \beta^{(n+1)-1}\, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\sigma_0)}}}d\beta$$

$$=\frac{1}{\Gamma(2n+3)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\sigma_0}\right)^{(2n+3)}}\int_0^\infty \beta^{(2n+4)-1}\, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\sigma_0)}}}d\beta$$

$$=\frac{\Gamma(2n+4)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\sigma_0}\right)^{(2n+4)}}{\Gamma(2n+3)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\sigma_0}\right)^{(2n+3)}}$$

$$=\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\sigma_0)}\frac{\Gamma(2n+4)}{\Gamma(2n+3)}\quad\ldots\ldots(25)$$

وبالطريقة نفسها نوجد مقدر بيز للمعلمة β عند دالة خسارة تربيعية للتوزيع الملوث وكالآتي:

$$Eq^*_{\text{Lindley}F}(\beta)=\int_0^\infty \beta\, q^*_{\text{Lindley}F}(\beta)d\beta$$

$$=\int_0^\infty \beta\ \ \beta^{(n+1)-1}\, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\sigma_0)}}}d\beta$$

$$=\frac{1}{\Gamma(2n+3)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\sigma_0}\right)^{(2n+3)}}\int_0^\infty \beta^{(2n+4)-1}\, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\sigma_0)}}}d\beta$$

$$=\frac{\Gamma(2n+4)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\sigma}\right)^{(2n+4)}}{\Gamma(2n+3)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\sigma}\right)^{(2n+3)}}$$

$$=\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\sigma)}\frac{\Gamma(2n+4)}{\Gamma(2n+3)}=\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\sigma)}\frac{(2n+3)(2n+2)!}{(2n+2)!}=\frac{2n+3}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\sigma)}\quad\ldots\ldots(26)$$

وعليه يكون مقدر بيز الحصين للمعلمة β للتوزيع اللاحق المختلط في ظل دالة خسارة تربيعية كالآتي:

$$\therefore E\widehat{\pi}^{*}{}_{\mathrm{Lindley}F}(\beta)=\begin{cases}\hat{\boldsymbol{\lambda}}\dfrac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha}-\sigma_0\right)}\,\dfrac{2n+3}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha}-\sigma\right)}+(1-\hat{\boldsymbol{\lambda}})\dfrac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha}-\sigma\right)}\,\dfrac{2n+3}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha}-\sigma\right)} & if \quad \sigma_0<\hat{\sigma}\\ \dfrac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha}-\sigma_0\right)}\,\dfrac{2n+3}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha}-\sigma\right)} & if \quad \sigma_0\geq\hat{\sigma}\end{cases}\ \ldots$$

(27)

ونلاحظ من معادلة (27) انه لا يمكن حلها بالطرائق التحليلية الاعتيادية لكونها معادلة غير خطية لذلك سيجري الطرائق التكرارية وهي طريقة نيوتن رافسون في ايجاد مقدر بيز الحصين للمعلمة ($\widehat{\beta}_{\mathrm{Lindley}FR.Bayes}$

3–الجانب التطبيقي:

1_المقدمة:

تعد فيروسات كورونا والتي عُرفت بالفيروسات التاجية مجموعة كبيرة من الفيروسات التي يمكن أن تُصيب الحيوانات والبشر على حد سواء، حيث تسبب أمراض الجهاز التنفسي، سواء التي تكون خفيفة مثل نزلات البرد أو شديدة مثل الالتهاب الرئوي. ومؤخراً ظهر نوع جديد من فيروسات كورونا وتسبب في وفاة الكثيرين حول العالم، ولا يزال مستمراً حتى الآن وهو فايروس كوفيد–19.و كوفيد–19 هو اسم الوباء المعدي الذي يتسبب به كورونا المستجد، وظهر الفيروس أول مرة في ديسمبر/ كانون أول 2019 بمدينة ووهان الصينية، و وجرى تعريف المرض في 13 يناير/ كانون ثاني عقب أعراض ظهرت على مجموعة من المرضى وأن من الأعراض الأكثر شيوعاً لهذا الفايروس هي الحمى والسعال وضيق التنفس والإرهاق، ولكن في الحالات المتقدمة من المرض فقد يصاب المريض بآلام، وانسداد الأنف، والرشح، وآلام في الحلق وإسهال وينتقل وباء "كوفيد–19" عن طريق تعرض الأشخاص لرذاذ المرضى الناتج عن السعال والعطس ولمسهم للفم والأنف والعينين، كما ينتقل عن طريق لمس اليدين للأسطح الملوثة بالرذاذ الحامل للفيروس.لا يوجد لقاح أو علاج محدد فعال ضد الفيروس حتى الآن، ولكن يجري استخدام الأدوية الداعمة حسب حالة المريض، ويجري البحث في فعالية بعض الأدوية على الفيروس، ولكن لم يُكتشف علاج مقاوم له حتى الآن.**[https://www.aa.com.tr/ar/2020]** لذلك يعدُّ هذا المرض او الوباء من امراض العصر الحالية التي من الأهمية اجراء الدراسات حولها وتطبيق البيانات الناتجة عنه على الطرائق الاحصائية والرياضية التي يتناولها الباحثون.

2_البيانات التطبيقية:

أُخذِت عينة عشوائية بحجم **(n=30)** مريض مصاب بفايروس كورونا المستجد **COVD–19** من سجلات المرضى الراقدين في قسم الحميات في مستشفى الحسين التعليمي في محافظة كربلاء المقدسة وتمثلت هذه البيانات بقياس اوقات البقاء **(lifetimes)** بالأيام تحت العلاج لحين الوفاة او الشفاء من المرض او مغادرة المستشفى وباستعمال برنامج Mat lab جرى انشاء برنامج خاص لتطبيق الطريقة على البيانات الحقيقية لتقدير معلمات توزيع فريجيت وقد عُدَّ مدة البقاء منذ التشخيص واخذ العلاج ولحين المغادرة كما هو مبين في جدول (1–4):

جدول(1 -4) اوقات البقاء **(lifetimes)** بالأيام تحت العلاج لحين الوفاة او الشفاء من المرض أو مغادرة المستشفى للمصابين بفايروس **COVD-19**

i	t_i
1	22
2	11
3	17
4	23
5	29
6	44
7	35
8	38
9	41
10	8
11	17
12	19
13	14
14	19
15	34
16	29
17	17
18	18
19	19
20	16
21	22
22	33
23	10
24	15
25	25
26	19
27	20
28	21
29	22
30	43

3_اختبار ملائمة البيانات: جرى اختبار البيانات باستعمال برنامج easy fit للتأكد من كونها تتبع التوزيعات المدروسة ام لا فقد جرى اختبار البيانات التي تمثل اوقات البقاء **(lifetimes)** بالأيام تحت العلاج لحين الوفاة او الشفاء من المرض أو مغادرة المستشفى للمصابين بفايروس **(COVD-19)** عند الفرضية الاحصائية الآتية:

H_0: البيانات تتبع توزيع فريچت

H_1: البيانات لا تتبع توزيع فريچت

وكانت نتائج الاختبار كما في الجدول (2-4)

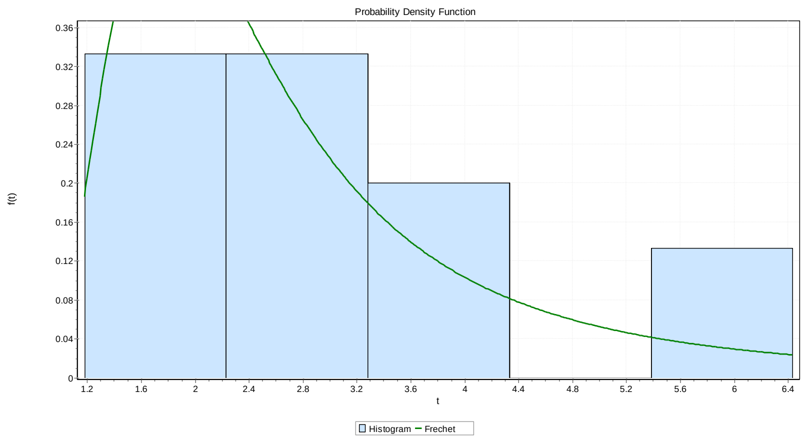
جدول (2-4) نتائج اختبار البيانات الحقيقة

Distribution	Kolmogorov-Smirnov	Anderson Darling	Sig.
	Statistic	Statistic	
Frechet	0.14721	0.7917	0.48857

حيث يتضح من جدول(2-4) أنّ قيمة .Sig والبالغة (0.48857) اكبر من مستوى المعنوية 0.05 لذلك لا نرفض فرضية العدم اي أن البيانات تتبع توزيع فريچت .

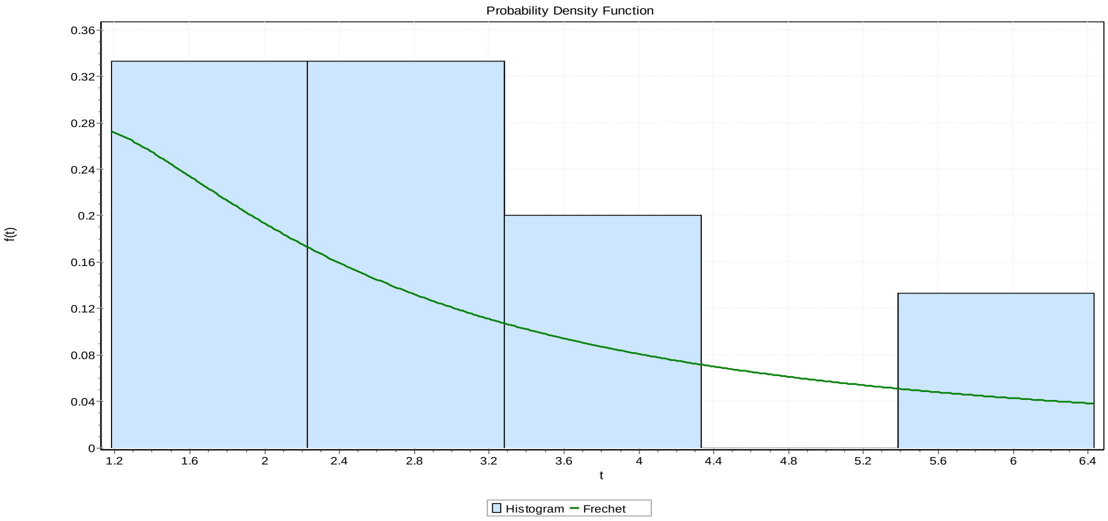
وقد كانت المعلمات المقدرة بموجب برنامج (α=2.4125, β=2.046) .

وقد كانت المعلمات المقدرة بموجب برنامج (α=2.4125, β=2.046) وإن منحنى دالة الكثافة الاحتمالية كان كما في شكل (4-1)



شكل (4-1) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع فريچت بالمعلمات (α=2.4125, β=2.046)

عندما (α=1, β=2.046) يصبح منحنى دالة الكثافة الاحتمالية كما في شكل (4-2) لأننا بصدد تقدير معلمة القياس لتوزيع فريچت .

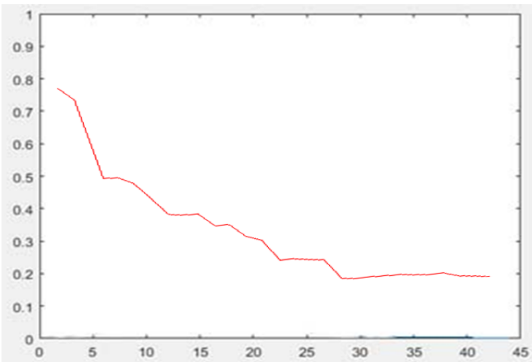


شكل (2-4) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع فريچت بالمعلمات $(\alpha=1,\ \beta=2.046)$

وعند الرجوع الى الأطباء لغرض الحصول على المعلومات الأولية عن المرضى المصابين بفايروس كورونا وما جرى متابعته من قبلهم حول تاريخهم المرضي والامراض المزمنة المصابين بها او غيرها من العوامل المؤثرة على شدة الاصابة بالمرض والمؤثر على حالتهم المرضية من مدة بقاء او الوفاة او المغادرة واعادة اختبار البيانات الاولية جرى التوصل الى انها تتبع توزيع ليندلي.

4-**تحليل البيانات:** بينت نتائج الجانب التطبيقي أنَّ افضل طريقة لتقدير معلمات توزيع فريچت هي تقدير بيز الحصين عندما يكون التوزيع الاساسي القياسي والتوزيع الملوث الاساسي توزيع ليندلي عند حجم العينة (30,) , لذلك سيجري تطبيق هذه الطريقة على البيانات الحقيقية لتقدير معلمات توزيع فريچت , وباستعمال برنامج Mat lab جرى انشاء برنامج خاص لتطبيق الطريقة على البيانات الحقيقية وكانت قيمة معلمة القياس المقدرة $\hat{\beta}_{FeLindely}$ (=2.045) .إنّ نتائج تحليل البيانات التطبيقية تؤكد على ضرورة استعمال توزيع ليندلي كتوزيع اولي ملوث بنسب معينة من التلوث في ايجاد تقدير بيز الحصين في حال اتباع البيانات الحقيقية توزيع فريچت .

والشكل الاتي يبين منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع فريچت للبيانات الحقيقية عندما تكون قيمة معلمة القياس



$(\alpha 1$ و $=2.045\hat{\beta})$

شكل (3-4) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع فريچت عند ($\hat{\beta}$=2.045) المقدرة بطريقة بيز الحصين عن صنف التلوث الاولي ليندلي.

5-الاستنتاجات:.

1. افضل تقدير بيزي حصين عند صنف التوزيع الأولي الامكان الاعظم النوع الثاني كان عند التوزيع الأولي القياسي الاساسي والتوزيع الاولي الملوث توزيع ليندلي مقارنة مع توزيع الاولي ملوث كاما.

2. اظهرت نتائج تحليل البيانات التطبيقية المتمثلة بأوقات البقاء (**lifetimes**) بالأيام تحت العلاج لحين الوفاة او الشفاء من المرض أو مغادرة المستشفى للمصابين بفايروس (**COVD-19**) التأكيد على ضرورة استعمال توزيع ليندلي كتوزيع اولي ملوث بنسب معينة من التلوث في ايجاد تقدير بيز الحصين في حال اتباع البيانات الحقيقية توزيع فريچت

6_التوصيات:

1.استعمال توزيعات اخرى غير توزيع فريچت ومقارنتها بما توصل اليه الباحثان.

2. استعمال دوال خسارة اخرى غير دالة الخسارة التربيعية مثل دالة خسارة Linex ودالة الخسارة Entropy لمعرفة سلوك تقدير بيز الحصين في ظل وجود تلك الدوال.

3. امكانية استعمال المنطق الضبابي في التوزيع الاولي الملوث للحصول على دقة اكثر في تقديرات بيز الحصينة.

7_المصادر: اولا-مصادر عربية:

1. بشار خالد علي (2018) , "اختيار افضل تقدير للمعولية الضبابية لتوزيع فريچت " , رسالة ماجستير غير منشورة, جامعة كربلاء , كلية الادارة والاقتصاد .

2.هبة الله, و ماجد علي شريم, (2005) , " دراسة مقارنة لطرق التقدير الحصينة لدالة البقاء مع تطبيق عملي على مرضى سرطان الدم في اليمن " , اطروحة دكتوراه غير منشورة- كلية الادارة والاقتصاد- جامعة بغداد .

3.مناع , احمد سعدون , (2019) , " بعض طرائق معولية بيز الحصينة في حالة بيانات سابقة متناقضة ((prior data conflict) " , رسالة ماجستير غير منشورة , جامعة بغداد كلية الادارة والاقتصاد.

4.وادي, اوات سردار ,2007, مقارنة طرائق تقدير معلمات ودالة معوليه توزيع كاما ذي المعلمتين في حالة البيانات المفقودة باستخدام المحاكاة, رسالة ماجستير , جامعة بغداد ,كلية الادارة والاقتصاد.

ثانيا:مصادر أجنبية:

1. Août , (2017), Robust linear static panel data models using ε–contamination" , Centre de recherche sur . les risques les enjeux économiques et les politiques publiques **www.crrep.ca**

2..Baltagia, Badi H.; Bresson, Georges;Anoop Chaturvedi; Guy Lacroix Août , (2020), Robust Dynamic Panel Data Models Using ε–Contamination" , IZA – Institute of Labor Economics, ISSN: 2365-9793

3.. Berger, James; Berlliner , L. Mark, (1986). "Robust Bayes and Emperical Bayes analysis with ε– contaminated Priors" , the annals of statistics Vol.14 No.2.

4. Haro-Lopez, Rube A ; M. Smith ,Adrian F.,(1999), " On Robust Bayesian Analysis for Location and Scale Parameters" , Journal of Multivariate Analysis 70, 30-56

5.Iyer , Ravi K., (2013) , " Hazard and Reliability Functions,Failure Rates" , Probability with Engineering Applications, Dept. of lectrical and Computer Engineering University of Illinois at Urbana Champaign, ECE 313

6. Kopcimzewski, Pawel, (2004), " INFERENCE FROM NONINFORMATIVE ML-II PRIOR", Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science, 2004, Volume 3, Issue 1, pages 61-66

7. Nakagawa, Tomoyuki ; Hashimoto, Shintaro, (2018), " Robust Bayesian inference via – divergence" , Faculty of Science and Technology, Tokyo University of Science, Noda, Chiba, 278{8510}

8.Pankaj Sinha* and J. Prabha(2010)" Bayes Reliability Measures of Lognormal and Inverse Gaussian Distributions under ML-II e-contaminated Class of Prior Distributions" Defence Science Journal, Vol. 60, No. 4, July 2010, pp. 442-450

9.Panwar , M. S.; Tomer , Sanjeev K. . (2019) " Robust Bayesian Analysis of Lifetime Data from Maxwell Distribution" , Austrian Journal of Statistics January 2019, Volume 48, 38–55.