بناء توزيع احتمالي لدالة القوى الموسع مع تطبيق عملي[1]

Constructing a probability distribution of an extended power function with practical application

فلاح حسن جبار
Falah Hasan Jabaar
flaah.h@s.uokerbala.edu.iq

أ.م .د. ايناس عبدالحافظ محمد
Enas Abdel Hafez Mohamed
enas.albasri@uokerbala.edu.iq

كلية الإدارة والإقتصـاد _ جامعة كربــلاء
Economics and Administration College – Karbala University

المستخلص:

تعد عملية التوسعة للتوزيعات الاحتمالية من العمليات المهمة التي زادت أهميتها بشكل كبير في العقود القليلة الماضية ، ويرجع ذلك الى زيادة قدرة التوزيعات الكلاسيكية في تمثيل البيانات الحقيقية بشكل أوسع وادق ، وان عملية توسعة التوزيعات باستعمال عوائل وفئات مشتقه تعد احدى الطرائق المستعملة حديثا في توسعة التوزيعات ، وفي هذه البحث تم استعمال العائلة الاسية الجديدة (NEX–Family) في بناء انموذج احتمالي جديد يدعى (The New Exponential–X Power function distribution) (NEXPF) والانموذج المقترح هو توسعة لتوزيع دالة القوى ، اذ تم دراسة بعض خصائصه الإحصائية ، تم تقدير معلمات التوزيع الجديد بطريقتين هما (طريقة المربعات الصغرى ، طريقة المقدرات التجزئية) ، وقد تم اجراء دراسة محاكاة موجزة باستعمال أسلوب (مونت–كارلو) لتقيم أداء مقدرات المعلمات للأنموذج الجديد بالطريقتين ، فقد اُستعمل برنامج كتب بلغة (Wolfram Mathematica 12.2) ، وتم اجراء عدة تجارب بأحجام عينات صغيرة ومتوسطة وكبيرة (25،50،75،100) ، واستعمل المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) للمقارنة بين طريقتي التقدير لمقدرات المعلمات .

الكلمات المفتاحية: توزيع دالة القوى، توزيع دالة القوة الموسع الجديد، طريقة المربعات الصغرى

Abstract:

The process of expanding the probability distributions is one of the important operations that has increased in importance significantly during the past few decades, due to the increase in the ability of classical distributions to represent real data in a broader and more accurate way. In this research, the new exponential family (NEX–Family) was used to build a new probabilistic model called (The New Exponential–X

[1] بحث مستل من رسالة ماجستير" تقدير المعولية لتوزيع دالة القوى الموسع باستعمال (NLTE-X Family) مع تطبيق عملي"

Power function distribution) (NEXPF), and the proposed model is an expansion of the distribution of the power function. As some of its statistical properties were studied, the parameters of the new distribution were estimated in two ways: (the least squares method, the partial estimator's method). In (Wolfram Mathematica 12.2), several experiments were conducted with small, medium and large sample sizes (100, 75, 50, 25), and the mean square error(MSE)was used to compare the two estimation methods for parameter estimations.

Key words: the distribution of the power function, The New Exponential-X Power function distribution , the least squares method.

المقدمة:

يتم استعمال التوزيعات الإحصائية بشكل اوسع في دراسة الظواهر الطبيعية ، وعلى مرّ السنين تم تحديد ودراسة العديد من التوزيعات ومع ذلك فان لديها نطاقا محدودا من القدرات ومن ثمّ لا يمكن استعمال ها في جميع المواقف وهذا يرجع الى حقيقة ان خصائص الظاهرة تتغير بمرور الوقت ، ونتيجة لذلك طور الباحثون توزيعات جديده تمتاز بالمرونة والدقة في تحليل بيانات الظاهرة عن طريق توسعة التوزيعات بطرق متعددة التي تمكننا من انشاء انموذج توزيع احتمالي جديد بناءً على توزيع موجود، لذلك من الممكن انتاج مجموعه محدثة من التوزيعات الاحتمالية ، وفي السنوات الأخيرة تم اجراء العديد من الاعمال البحثية لإنشاء توزيعات جديدة عن طريق انشاء عائلات وفئات جديدة عن طريق تعديل توزيع خط الأساس وذلك عن طريق إضافة معلمات شكل إضافية وهذا ما يجعل التوزيع الناتج من العائلات والفئات الجديدة اكثر دقة ومرونة في الحصول على افضل تمثيل للبيانات مع اقل عدد من الأخطاء ، وهنا تكمن أهمية الدراسة للتوزيعات الناتجة من هذه العائلات والفئات ،ومثال على ذلك Abdelfattah Mustafa et al (2016) [15] اقترح توزيع الاسي الموسع الجديد (WGED) ذو الثلاثة معالم باستعمال عائلة ويبل (Weibull-G family) ، (Hassan Okasha et al 2017) [16]اقترح توزيع ويبل العكسي الموسع (MOEIW)عن طريق استعمال (Marshall-Olkin method) ، (Abdulhakim A. Al-Babtain)[6] اقترح توزيع رايلي الموسع باستعمال (logistic – G family) ، (Omar Alzeley , et al 2021)[7] توزيع فريجت الموسع الجديد وذلك عن طريق استعمال العائلة الاسية الجديدة (NEX family) والتي تعد احد الطرق لتوليد التوزيعات الجديدة الجديد ، سيتم في هذا البحث استعمال العائلة الاسي الجديدة (NEX family)[11] لتوسعة توزيع دالة القوى ذو المعلمتين (Power function distribution) .

مشكلة البحث:

تعد نمذجة احداث الحياة الواقعية والعمليات الطبيعية باستعمال التوزيعات الاحتمالية من اهم العمليات ، إذ تتميز هذه العمليات بالتعقيد والمخاطر لهذه الأسباب عمل الباحثون على تطوير التوزيعات الاحتمالية حيث تستمر التوزيعات

الاحتمالية المؤكدة والكلاسيكية في التقصير في وصف دقيق للبيانات التي تم الحصول عليها من الاحداث الطبيعية نتيجةً للتطور الحاصل ،وهنا تكمن مشكلة عدم تمثيل البيانات بالشكل الصحيح والمطلوب ، لذا اقتضت الحاجة لزيادة مرونة ودقة التوزيعات المستخدمة في وصف البيانات وذلك عن طريق استعمال العديد من العوائل والفئات المشتقة حديثا لتوليد التوزيعات الموسعة ،ومنها عائلة التوزيعات الاسية الجديدة (NEX Family) التي تزيد من مرونة التوزيعات وذلك عن طريق إضافة معلمة للتوزيع الناتج التي تجعلهُ اكثر مرونة وملاءمة في تحليل البيانات .

هدف البحث:

تتلخص اهداف البحث بالنقاط الاتية:

1- تقديم انموذج توزيع احتمالي جديد يدعى (The New Exponential-X Power function distribution) وذلك عن طريق استعمال العائلة الاسية الجديدة (NEX Family) والتي تجعل التوزيع الجديد أكثر مرونة ودقة في تمثيل البيانات.
2- اشتقاق الخصائص الإحصائية للأنموذج الاحتمالي الجديد واستعمال طريقتين لتقدير معلمات الانموذج الجديد وهي (طريقة المربعات الصغرى "OLS" ، طريقة المقدرات التجزيئية " P.C").
3- المقارنة بين طريقتي التقدير واختيار أفضل طريقة لتقدير معالم الانموذج الاحتمالي الجديد.

الجانب النظري:

1-توزيع دالة القوى (Power function distribution):[9][4][5][14]

يمثل توزيع دالة القوى من التوزيعات المهمة والواسعة الاستعمال في نمذجة البيانات المتعلقة لأوقات الفشل والبقاء لـلأجهزة والمعدات الكهربائية وكذلك في تمثيل بيانات الحياة او الموت التابعة للكائنات الحية، ويوفر معلومات أكثر ملائمة حول المعولية ومعدلات المخاطر، كما يعد من الحالات الخاصة لتوزيع باريتو.

ليكن (x_i) متغير عشوائي يتبع توزيع دالة القوى فان دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) تكون بالشكل الاتي:

$$g(x) = \frac{\beta\, x^{\beta-1}}{\alpha^{\beta}} \qquad 0 < x < \alpha \ \ , \alpha, \beta > 0 \qquad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$
$$= 0 \qquad\qquad O.W$$

β :تمثل معلمة الشكل (shape parameter)، α: تمثل معلمة القياس(scale parameter) او ما يطلق عليها في

بعض الأحيان معلمة المدى، وان الدالة التجميعية للتوزيع (C.D.F) تكون بالشكل الاتي:

$$G(x) = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

2-العائلة الاسية الجديدة (The New Lifetime Exponential-X Family) (NEX)[11]

قدم الباحث (Xiaoyan Huo) واخرون في عام (2020) طريقة جديدة لتوليد التوزيعات تسمى العائلة الاسية الجديدة (The New Lifetime Exponential-X Family) وان العائلة الاسية الجديدة (NEX) تجعل

التوزيعات اكثر مرونة في تمثيل البيانات والمعادلتين الاتيتين يمثلان دالة الكثافة الاحتمالية والدالة التجميعية للعائلة الاسية الجديدة.

$$G(x;\lambda,\xi) = 1 - \frac{1-F(x;\xi)}{e^{\lambda F(x;\xi)}} \quad ,\lambda > 0\,, x \in R \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \quad (3)$$

$F(x;\xi)$: تمثل الدالة التجميعية (CDF) للتوزيع الأساس.

وتعرف دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) للعائلة الاسية الجديدة على النحو الاتي:

$$g(x;\lambda,\xi) = \frac{f(x;\xi)}{e^{\lambda F(x;\xi)}}.\left[1+\lambda\left(1-F(x;\xi)\right)\right] \quad ,x \in R \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$f(x;\xi)$: تمثل دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) للتوزيع الأساس.

(ξ) : يمثل متجه المعالم للتوزيع الأساس.

3-توزيع دالة القوى الموسع (The New Exponential-X Power function distribution)

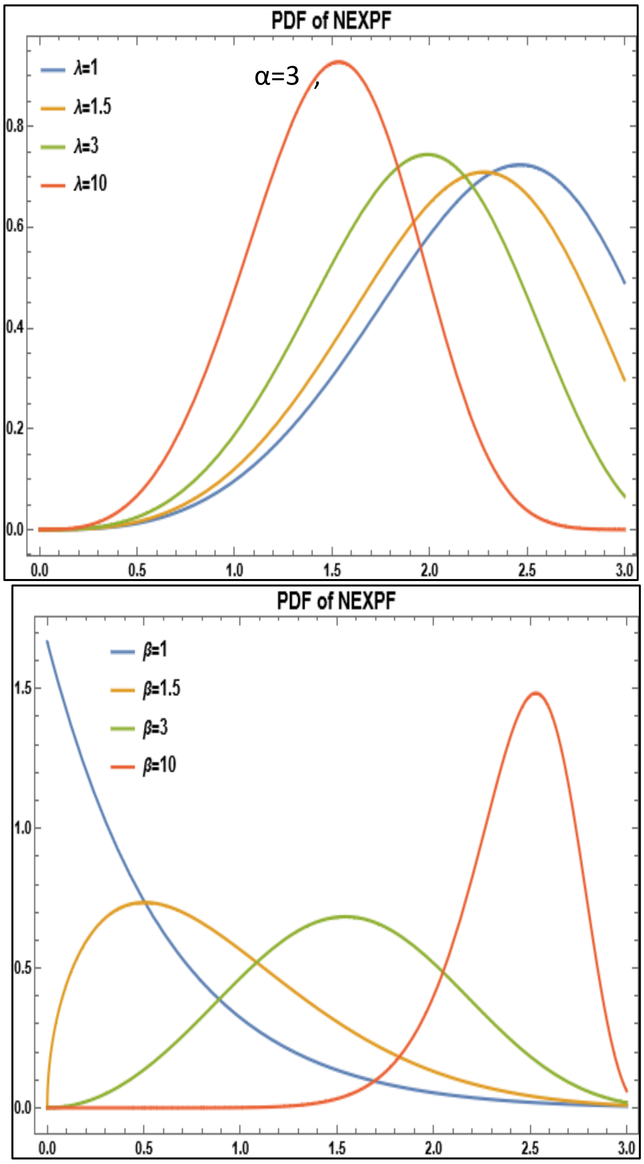
يعد التوزيع أحد أعضاء العائلة الاسية الجديد (NEX- Family) ويمتاز بكونه أكثر مرونة ودقة في تمثيل البيانات ، يمكن الحصول على توزيع دالة القوى الموسع والذي يرمز له (NEXPF) عن طريق تعويض دالة الكثافة الاحتمالية والدالة التجميعية لتوزيع دالة القوى في المعادلة (4) والتي تمثل دالة الكثافة الاحتمالية للعائلة الاسية الجديدة وبذلك نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الموسع الجديد (NEXPF) ، وللحصول على الدالة التجميعية للتوزيع الجديد نعوض في المعادلة (3) والتي تمثل الدالة التجميعية للعائلة الاسية الجديدة وعلى النحو الاتي :

$$g_{nexpf}(x;\alpha,\beta,\lambda) = \frac{\beta\, x^{\beta-1}\left[1+\lambda\left(1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right)\right]}{\alpha^{\beta} e^{\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}} \quad ,\ 0 < x < \alpha \quad ,\alpha,\beta,\lambda > 0 \quad \ldots..(5)$$

$$G_{nexpf}(x;\alpha,\beta,\lambda) = 1 - \frac{\left(1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right)}{e^{\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

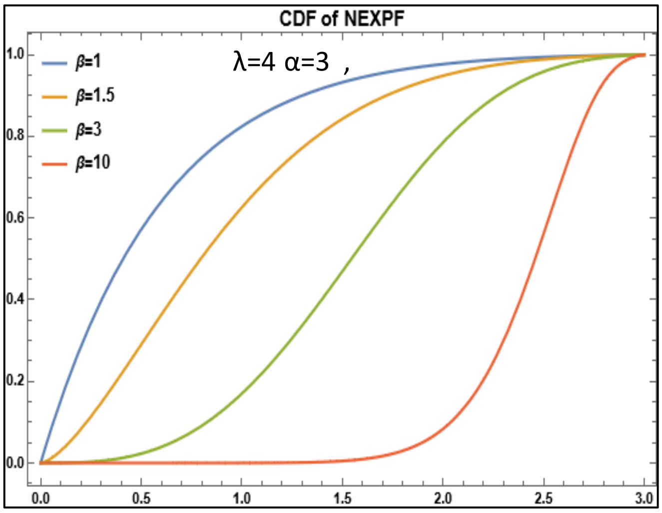
المعادلة (5) تمثل دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) لتوزيع (NEXPF)، والمعادلة (6) تمثل الدالة التجميعية (C.d.f) لتوزيع (NEXPF)، وان معالم الشكل للتوزيع الجديد هما (β ، λ) ومعلمة القياس (α).

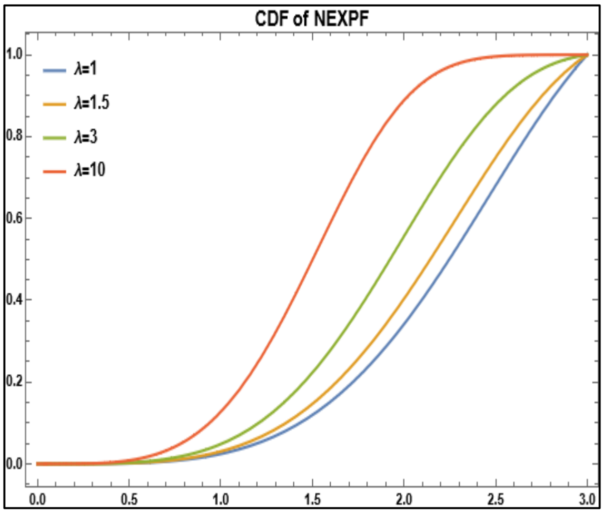
λ=4 α=3 ,



شكل (1) دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) لتوزيع دالة القوى الموسع الجديد (NEXPF) ولقيم مختلفة لمعلمتي الشكل (λ ، β) بثبات قيمة معلمة القياس(α).

β=4 α=3 ,





شكل (2) الدالة التجميعية (C.D.F) لتوزيع دالة القوى الموسع الجديد (NEXPF) ولقيم مختلفة لمعلمتي الشكل (β ، λ) بثبات قيمة معلمة القياس (α).

وان دالة المعولية (Reliability function) لتوزيع (NEXPF) تكون بالشكل الاتي:

$$R(t) = e^{-\lambda\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}}\left(1-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\ldots\ldots (7)$$

ودالة المخاطرة (Hazard Function) لتوزيع (NEXPF) كالاتي:

$$h(t) = \frac{\beta\, t^{\beta-1}\left\{1+\lambda\left(1-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}\right)\right\}}{\alpha^{\beta}\left(1-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}\right)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots.\ldots\ldots.. \quad (8)$$

الدالة الكمية (The quantile function) لتوزيع (NEXPF) كالاتي:

$$x = e^{\frac{\ln\left(-\frac{\text{Lambert W}\left(\frac{\lambda (q-1)}{e^{\lambda}}\right)+\lambda}{\lambda}\right)+\beta \ln(\alpha)}{\beta}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Lambert W: تمثل دالة لامبيرت.

3-1 الخصائص الإحصائية:

3-1-1: العزم اللامركزي من الرتبة (r^{th}):

$$E(x^r) = \int_0^{\alpha} x^r g_{nexpf}(x; \alpha, \beta, \lambda)\ dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$E(x^r) = \frac{\alpha^r}{\lambda^{\frac{r}{\beta}}} \left(\frac{\gamma\left(\frac{r+\beta}{\beta}, \lambda\right) - \gamma\left(\frac{r+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda} + \gamma\left(\frac{r+\beta}{\beta}, \lambda\right) \right) \ ; r = 1,2,3 \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots (11)$$

3-1-2: العزم المركزي من الرتبة (r^{th}):

$$E(x-\mu)^r = \int_0^{\alpha} (x-\mu)^r g_{nexpf}(x, \alpha, \beta, \lambda)\, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

$$\mu_r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-\mu)^{r-k} \frac{\alpha^k}{\lambda^{\frac{k}{\beta}}} \left\{ \begin{array}{r} \frac{\boldsymbol{\gamma}\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \boldsymbol{\lambda}\right) - \boldsymbol{\gamma}\left(\frac{k+2\beta}{\beta}, \boldsymbol{\lambda}\right)}{\lambda} \\ + \boldsymbol{\gamma}\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \boldsymbol{\lambda}\right) \end{array} \right\} \quad \ldots (13)$$

وتباين توزيع (NEXPF) يكون على النحو الاتي:

$$V(x) = \left[\begin{array}{c} \mu^2 \left\{ \begin{array}{c} \frac{\boldsymbol{\gamma}(1, \boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{\gamma}(2, \boldsymbol{\lambda})}{\lambda} + \\ \boldsymbol{\gamma}(1, \boldsymbol{\lambda}) \end{array} \right\} - 2\mu \frac{\alpha}{\lambda^{\frac{1}{\beta}}} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\gamma\left(\frac{1+\beta}{\beta}, \lambda\right) - \gamma\left(\frac{1+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda} \\ + \gamma\left(\frac{1+\beta}{\beta}, \lambda\right) \end{array} \right\} \\ + \frac{\alpha^2}{\lambda^{\frac{2}{\beta}}} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\boldsymbol{\gamma}\left(\frac{2+\beta}{\beta}, \boldsymbol{\lambda}\right) - \boldsymbol{\gamma}\left(\frac{2+2\beta}{\beta}, \boldsymbol{\lambda}\right)}{\lambda} \\ + \boldsymbol{\gamma}\left(\frac{2+\beta}{\beta}, \boldsymbol{\lambda}\right) \end{array} \right\} \end{array} \right] \quad \ldots\ldots (14)$$

3-1-3: معامل الالتواء (C.S):

$$C.S = \frac{\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}(-\mu)^{3-k}\frac{\alpha^k}{\lambda^{\frac{k}{\beta}}}\left\{\begin{array}{c}\frac{\gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta},\lambda\right)-\gamma\left(\frac{k+2\beta}{\beta},\lambda\right)}{\lambda}\\ +\gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta},\lambda\right)\end{array}\right\}}{\left\{\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}(-\mu)^{2-k}\frac{\alpha^k}{\lambda^{\frac{k}{\beta}}}\left\{\begin{array}{c}\frac{\gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta},\lambda\right)-\gamma\left(\frac{k+2\beta}{\beta},\lambda\right)}{\lambda}\\ +\gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta},\lambda\right)\end{array}\right\}\right\}^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots(15)$$

4-1-3: معامل التفلطح (C.k):

$$C.k = \frac{\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}(-\mu)^{4-k}\frac{\alpha^k}{\lambda^{\frac{k}{\beta}}}\left\{\begin{array}{c}\frac{\gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta},\lambda\right)-\gamma\left(\frac{k+2\beta}{\beta},\lambda\right)}{\lambda}\\ +\gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta},\lambda\right)\end{array}\right\}}{\left\{\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}(-\mu)^{2-k}\frac{\alpha^k}{\lambda^{\frac{k}{\beta}}}\left\{\begin{array}{c}\frac{\gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta},\lambda\right)-\gamma\left(\frac{k+2\beta}{\beta},\lambda\right)}{\lambda}\\ +\gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta},\lambda\right)\end{array}\right\}\right\}^{2}} \quad \ldots\ldots(16)$$

5-1-3 : الدالة المولدة للعزوم ($M_x^{(t)}$):

$$M_x^{(t)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t)^k\alpha^k}{k!\,\lambda^{\frac{k}{\beta}}}\left\{\frac{\gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta},\lambda\right)-\gamma\left(\frac{k+2\beta}{\beta},\lambda\right)}{\lambda}+\gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta},\lambda\right)\right\} \quad \ldots\ldots(17)$$

4-طريقة المربعات الصغرى (LS) (Least square Method):[10][8][1]

تعد طريقة المربعات الصغرى من اهم طرائق التقدير وأكثرها استعمال اً، وهذه الطريقة تستند الى جعل مجموع مربعات الخطأ اقل ما يمكن ويتم عن طريق ها اختيار التوزيع الملائم للبيانات وتمتاز بخاصية عدم التحيز والاتساق للمقدرات الناتجة عنها، ويمكن صياغتها على النحو الاتي:

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(G(x_i) - \frac{i}{n+1}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(18)$$

$G(x_i)$: تمثل دالة التوزيع التراكمي لتوزيع دالة القوى الموسع الجديد (NEXPF)

وبأجراء الاشتقاق الجزئي للمعادلة (18) بالنسبة لمعلمات التوزيع الثلاثة (λ، β، α) لنحصل على ثلاثة معادلات بعد مساواتها بالصفر.

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha} = 2\sum_{i=1}^{n}\left[G(x_i;\alpha,\beta,\lambda) - \frac{i}{n+1}\right].\left[\frac{\partial G(x_i;\alpha,\beta,\lambda)}{\partial\alpha}\right] = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(19)$$

$$\frac{\partial S}{\partial\beta} = 2\sum_{i=1}^{n}\left[G(x_i;\alpha,\beta,\lambda) - \frac{i}{n+1}\right].\left[\frac{\partial G(x_i;\alpha,\beta,\lambda)}{\partial\beta}\right] = 0 \quad \ldots\ldots(20)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda}=2\sum_{i=1}^{n}\left[G(x_i;\alpha,\beta,\lambda)-\frac{i}{n+1}\right].\left[\frac{\partial G(x_i;\alpha,\beta,\lambda)}{\partial \lambda}\right]=0 \quad \ldots\ldots\ldots \ (21)$$

وبعد استخراج المشتقات الثلاثة الثلاثة ادناه وتعويضهم في المعادلات (19)(20)(21)

$$\left(\left[\frac{\partial G(x_i;\alpha,\beta,\lambda)}{\partial \alpha}\right],\left[\frac{\partial G(x_i;\alpha,\beta,\lambda)}{\partial \beta}\right],\left[\frac{\partial G(x_i;\alpha,\beta,\lambda)}{\partial \lambda}\right]\right)$$

وحل المعادلات بالطرق العددية اذ تم استعمال طريقة (نيوتن– رافسون) للحصول على القيم التقديرية $(\hat{\alpha}_{LS},\hat{\beta}_{LS},\hat{\lambda}_{LS})$

للمعلمات المجهولة (α ,β ,λ) .

5– طريقة المقدرات التجزيئية (P.C) (Method of Percentiles Estimators): [13][12]

تعد من طرائق التقدير المهمة التي اقترحت من العالم (Kao) ، وبافتراض ان (q_i) يمثل تقدير لدالة التوزيع التجميعية $G_{nexpf}(x_i;\alpha,\beta,\lambda)$.

$$\because\ G_{nexpf}(x_i;\alpha,\beta,\lambda)=1-\frac{\left(1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right)}{e^{\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}}$$

q_i : يمثل مقدار لا معلمي يأخذ الصيغة الاتية :

$$q_i=\frac{i-0.3}{n+0.25}$$

فان مقدر المعلمات $(\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\lambda})$ نحصل علية عن طريق اجراء الاشتقاق الجزئي للصيغة ادناه بالنسبة للمعلمات (α ,β ,λ) .

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\left(q_i-G_{nexpf}(x_i;\alpha,\beta,\lambda)\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (22)$$

نأخذ المشتقة الجزئية للمعادلة (22) بالنسبة للمعلمات (α ,β ,λ) لتكون بالشكل الاتي :

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha}=\sum_{i=1}^{n}\left(q_i-G_{nexpf}(x_i;\alpha,\beta,\lambda)\right)\left(\frac{\partial G_{nexpf}(x_i;\alpha,\beta,\lambda)}{\partial \alpha}\right)=0 \quad \ldots\ldots (23)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta}=\sum_{i=1}^{n}\left(q_i-G_{nexpf}(x_i;\alpha,\beta,\lambda)\right)\left(\frac{\partial G_{nexpf}(x_i;\alpha,\beta,\lambda)}{\partial \beta}\right)=0 \quad \ldots\ldots (24)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda}=\sum_{i=1}^{n}\left(q_i-G_{nexpf}(x_i;\alpha,\beta,\lambda)\right)\left(\frac{\partial G_{nexpf}(x_i;\alpha,\beta,\lambda)}{\partial \lambda}\right)=0 \quad \ldots\ldots (25)$$

وبعد مساوات المعادلات الثلاثة آنفاً بالصفر والتعويض عن قيمة (q_i) وكذلك التعويض عن قيمة الدالة التراكمية (6)

، وحل المعادلات الناتجة بعد التعويض بطريقة (نيوتن– رافسون) نحصل على قيمة مقدر المعلمات $(\hat{\alpha}_{P.C},\hat{\beta}_{P.C},\hat{\lambda}_{P.C}$

بطريقة المقدرات التجزيئية للأنموذج الجديد (NEXPF).

الجانب العملي:

في هذا القسم، سيتم مناقشة نتائج أسلوب المحاكاة، الذي سيقارن بين طرائق التقدير المستعملة لتقدير معلمات الأنموذج الجديد (NEXPF)، وأجريت الدراسة على احجام عينات مختلفة (صغيرة، متوسطة، كبيرة)، وقيم افتراضية محددة مسبقا مختلفة لمعلمات الانموذج الموسع الجديد، واستعمل المعيار الاحصائي(MSE) كأساس للمقارنة وذلك لتحديد افضلية طرائق التقدير.

1- مفهوم المحاكاة (The Simulation Concept):[2][3]

تعرف المحاكاة بانها طريقة رياضية لحل المشاكل المعقدة، أي انها أسلوب رياضي يمتاز بالمرونة والقدرة على التجريب

والاختبار لمرات عديدة واختصار الوقت والكلفة، ويستخدم أسلوب المحاكاة لتحديد التغيرات التي طرأت على المشكلة عند

تنفيذها، أي تمثيل او تقليد للواقع الحقيقي إذ تعطي معلومات وصورة واضحة تكون مفيدة للواقع الذي تمثله، وكذلك

تكرار التجربة الذي يعطي وصفا شاملا للأجراء الرياضي المستخدم.

2- مراحل تجربة المحاكاة (Stages of a simulation experience):

تم استعمال حزم برنامج [MATHMATICA-12.2] في كتابة برنامج المحاكاة ونفذ في الحاسبة الالكترونية، وتضمن

برنامج المحاكاة مراحل متعددة مبينة على النحو الاتي:

المرحلة الأولى:

تعتبر من المراحل المهمة والتمهيدية للمراحل اللاحقة وتتلخص في الخطوات الاتية:

1- اختيار قيم افتراضية لمعالم الانموذج الجديد (NEXPF) وحسب ما مبين في الجدول (1) أدناه:

جدول (1)

القيم الافتراضية الأولية للمعلمات والنماذج المقترحة

Models	α	β	λ
(1)	2	1	0.05
(2)	2	1	1.5
(3)	2	2.5	0.05
(4)	2	2.5	1.5
(5)	4	1	0.05

2- اختيار حجم العينة حيث تم اختيار اربعة احجام وهي (الصـغيرة والمتوسـطة والكـبيرة) وهي (25،50،75،100) من اجل تحديد تأثير حجم العينة على نتائج التقدير.

3- تكرار التجربة لمرات عديدة لغرض الحصول على أفضل نتائج متجانسة.

المرحلة الثانية:

تتضمن هذه المرحلة توليد بيانات عشوائية تلائم الأنموذج المقترح الجديد (NEXPF) بطريقة التحويل المعكوس وحسب الخطوات الاتية:

1- يتم توليد ارقام عشوائية q_i تتبع التوزيع المنتظم ضمن الفترة {0,1}

$$q_i \sim UniformDistribution(0,1) \quad , i = 1,2, \dots \dots \dots, n$$

وان q_i يمثل متغير عشوائي يتبع التوزيع المنتظم

2- تحويل الأرقام (البيانات) المولدة في الخطوة الأولى الى بيانات تتبع التوزيع (NEXPF) باستعمال طريقــة التحــويل المــعكوس وحسب المعادلة (9) أي ان :

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{e}^{\frac{\ln\left(-\frac{\text{Lambert W}\left(\frac{\lambda\,(q_i-1)}{e^{\lambda}}\right)+\lambda}{\lambda}\right)+\beta\,\ln(\alpha)}{\beta}}$$

المرحلة الثالثة:

يتم تقدير معلمات التوزيع (NEXPF) في هذه المرحلة بطريقة المربعات الصغرى (LS) وطريقة المقدرات التجزيئية (P.S).

المرحلة الرابعة :

تكرر هذه العملية (1000) مرة وفق برنامج كتب بلغة البرمجة [MATHMATICA-12.2]

المرحلة الخامسة:

تتم المقارنة في هذه المرحلة بين المقدرات التي تم الحصول عليها لمعلمات توزيع (NEXPF) والمبينة في الجداول (1-5) في الملحق وذلك باستعمال متوسط مربعات الخطأ (MSE) كمعيار احصائي للمقارنة، والجدول (2) يبين المقارنة.

جدول (2)

يمثل الرتب الكلية لمتوسط مربعات الخطأ (MSE) لطريقتي التقدير (P.C، LS) ولجميع قيم المعلمات الافتراضية وحسب حجم العينة.

n	Sum of Ranks	LS	P.C
25	$\sum$ Rank	7.5	7.5
	Overall Ranks	1.5	1.5
50	$\sum$ Rank	7	7
	Overall Ranks	1.5	1.5
75	$\sum$ Rank	8	7
	Overall Ranks	2	1
100	$\sum$ Rank	8	7
	Overall Ranks	2	1

الاستنتاجات:

أظهرت نتائج اجراء تجربة المحاكاة على خمسة نماذج ما يأتي:

1- تساوي الطريقتين (طريقة المربعات الصغرى ، طريقة المقدرات التجزيئية) في تقدير معلمات توزيع (NEXPF) للنماذج كافة عندما تكون احجام العينات صغيرة ومتوسطة (25،50) مشاهدة.

2- افضلية طريقة المقدرات التجزيئية في تقدير معلمات توزيع (NEXPF) للنماذج كافة عندما يكون حجم العينة (75 ،100) مشاهدة.

3- عندما تكون احجام العينات صغيرة ومتوسطة تكون كلا الطريقتين تعطي تقديرات متقاربة لمعلمات توزيع (NEXPF).

4- طريقة المقدرات التجزيئية تكون أفضل في تقدير معلمات توزيع (NEXPF) عند احجام العينات فوق المتوسطة والكبيرة.

المصادر

[1] أموري هادي كاظم الحسناوي وباسم شليبة مسلم ، (2002) ،"القياس الاقتصادي المتقدم النظرية والتطبيق". قسم الإحصاء – كلية الإدارة والاقتصاد – جامعة بغداد – المكتبة الوطنية، دار الكتب والوثائق ببغداد.

[2] الشمري، نجاة عبد الجبار رجب، (2008)،"استعمال المحاكاة في مقارنة مقدرات التقلص لمعلمة الشكل لتوزيع وايبل لبيانات المراقبة"، أطروحة دكتوراه في علوم الإحصاء، جامعة بغداد – كلية الإدارة والاقتصاد – قسم الإحصاء.

[3] عبد الأحد، عطاف اداور ،(2007)،(تقديرات المعولية للتوزيع الاسي بمعلمتين – دراسة مقارنة)، رسالة ماجستير مقدمة الكلية الإدارة والاقتصاد في جامعة بغداد.

[4] ناجي وليلى مطر، (2015)،"التقدير البيزي لدالة المعولية لتوزيع دالة القوة تحت دوال خسارة مختلفة"، مجلة كلية بغداد للعلوم الاقتصادية، الإصدار: (46)، الصفحات: (195-210).

[5] Ahsanullah, M. (1973). A characterization of the power function distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, *2*(3), 259-262.

[6] Al-Babtain, A. A. (2020). A new extended Rayleigh distribution. *Journal of King Saud University-Science*, *32*(5), 2576-2581.

[7] Alzeley, O., Almetwally, E. M., Gemeay, A. M., Alshanbari, H. M., Hafez, E. H., & Abu-Moussa, M. H. (2021). Statistical inference under censored data for the new exponential-X Fréchet distribution: Simulation and application to leukemia data. *Computational Intelligence and Neuroscience*, *2021*.

[8] Draper, N. R., & Smith, H. (1998). *Applied regression analysis* (Vol. 326). John Wiley & Sons.

[9] Evans, M., Hastings, N., Peacock, B., & Forbes, C. (2011). *Statistical distributions*. John Wiley & Sons.

[10] Gupta, R. D., & Kundu, D. (2001). Generalized exponential distribution: different method of estimations. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, *69*(4), 315-337.

[11] Huo, X., Khosa, S. K., Ahmad, Z., Almaspoor, Z., Ilyas, M., & Aamir, M. (2020). A new lifetime exponential-X family of distributions with applications to reliability data. *Mathematical Problems in Engineering*, *2020*.

[12] Kao, J. H. (1958). Computer methods for estimating Weibull parameters in reliability studies. *IRE Transactions on Reliability and Quality Control*, 15-22.

[13] Kao, J. H. (1959). A graphical estimation of mixed Weibull parameters in life-testing of electron tubes. *Technometrics*, *1*(4), 389-407.

[14] Meniconi, M., & Barry, D. M. (1996). The power function distribution: A useful and simple distribution to assess electrical component reliability. *Microelectronics Reliability*, *36*(9), 1207-1212.

[15] Mustafa, A., El-Desouky, B. S., & AL-Garash, S. (2016). Weibull generalized exponential distribution. *arXiv preprint arXiv:1606.07378*.

[16] Okasha, H. M., El-Baz, A. H., Tarabia, A. M. K., & Basheer, A. M. (2017). Extended inverse Weibull distribution with reliability application. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, *25*(3), 343-349.

الملحق

جدول (1)

يوضح متوسط القيم التقديرية للمعلمات ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لطريقتي التقدير (LS، P.C) ولكافة احجام العينات للأنموذج الأول ($\alpha=2$ ، $\beta=1$ ، $\lambda=0.05$)

n	Est.Par	LS	P.C	n	Est.Par	LS	P.C
25	$\hat{\alpha}$	2.20256	2.13363	50	$\hat{\alpha}$	2.09052	2.06661
	MSE	0.0979472	0.0602576		MSE	0.0301054	0.0248156
	Rank	2	1		Rank	2	1
	$\hat{\beta}$	1.10613	1.14981		$\hat{\beta}$	1.08946	1.11198
	MSE	0.0827033	0.100147		MSE	0.0758665	0.0833645
	Rank	1	2		Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	0.606959	0.607423		$\hat{\lambda}$	0.349804	0.362874
	MSE	0.999849	0.9213		MSE	0.454106	0.458187
	Rank	2	1		Rank	1	2
	$\sum$ Rank	[2]5	[1]4		$\sum$ Rank	[1]4	[2]5
75	$\hat{\alpha}$	2.0548	2.0395	100	$\hat{\alpha}$	2.03487	2.02397
	MSE	0.00992935	0.0082117		MSE	0.00445387	0.00372205
	Rank	2	1		Rank	2	1
	$\hat{\beta}$	1.06785	1.08261		$\hat{\beta}$	1.06403	1.07465
	MSE	0.0727782	0.077865		MSE	0.0344278	0.0368008
	Rank	1	2		Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	0.247802	0.257314		$\hat{\lambda}$	0.197994	0.20452
	MSE	0.186397	0.193209		MSE	0.131703	0.136026
	Rank	1	2		Rank	1	2
	$\sum$ Rank	[1]4	[2]5		$\sum$ Rank	[1]4	[2]5

جدول (2)

يوضح متوسط القيم التقديرية للمعلمات ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لطريقتي التقدير (LS،P.C) ولكافة احجام العينات للأنموذج الثاني (α=2 ، β=1 ، λ= 1.5)

n	Est.Par	LS	P.C	n	Est.Par	LS	P.C
25	$\hat{\alpha}$	2.14239	1.96127	50	$\hat{\alpha}$	2.07004	1.99691
	MSE	0.260437	0.132832		MSE	0.188243	0.132923
	Rank	2	1		Rank	2	1
	$\hat{\beta}$	0.973834	1.00667		$\hat{\beta}$	0.948446	0.968027
	MSE	0.0383881	0.0399208		MSE	0.0226176	0.0213941
	Rank	1	2		Rank	2	1
	$\hat{\lambda}$	1.62867	1.50312		$\hat{\lambda}$	1.37146	1.34473
	MSE	0.730796	0.471179		MSE	0.603443	0.4933
	Rank	1	1		Rank	2	1
	$\sum$ Rank	4 [1.5]	4 [1.5]		$\sum$ Rank	6 [2]	3 [1]
75	$\hat{\alpha}$	2.02065	1.97438	100	$\hat{\alpha}$	1.9959	1.96432
	MSE	0.0714295	0.0649663		MSE	0.0339255	0.0310489
	Rank	2	1		Rank	2	1
	$\hat{\beta}$	1.01383	1.02547		$\hat{\beta}$	0.958175	0.967138
	MSE	0.0187509	0.0192294		MSE	0.0158978	0.0152607
	Rank	1	2		Rank	2	1
	$\hat{\lambda}$	1.51889	1.49482		$\hat{\lambda}$	1.38525	1.37571
	MSE	0.294463	0.261548		MSE	0.354858	0.332931
	Rank	2	1		Rank	2	1
	$\sum$ Rank	5 [2]	4 [1]		$\sum$ Rank	6 [2]	3 [1]

جدول (3)

يوضح متوسط القيم التقديرية للمعلمات ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لطريقتي التقدير (LS،P.C) ولكافة احجام العينات للأنموذج الثالث (α=2 ، β=2.5 ، λ= 0.05)

n	Est.Par	LS	P.C	n	Est.Par	LS	P.C
25	$\hat{\alpha}$	2.06111	2.03947	50	$\hat{\alpha}$	2.03617	2.0265
	MSE	0.009098	0.00588737		MSE	0.0040072	0.00315436
	Rank	2	1		Rank	2	1
	$\hat{\beta}$	2.8104	2.93085		$\hat{\beta}$	2.91961	2.97573
	MSE	0.938246	1.11582		MSE	0.877858	0.963549
	Rank	1	2		Rank	1	2

	$\hat{\lambda}$	0.49752	0.525673		$\hat{\lambda}$	0.378033	0.386856
	MSE	0.69324	0.719305		MSE	0.507456	0.513523
	Rank	1	2		Rank	1	2
	$\sum$ Rank	4[1]	5[2]		$\sum$ Rank	4[1]	5[2]
75	$\hat{\alpha}$	2.00728	2.00184	100	$\hat{\alpha}$	2.01977	2.0155
	MSE	0.00133721	0.0012042		MSE	0.00126346	0.00126195
	Rank	2	1		Rank	2	1
	$\hat{\beta}$	2.83274	2.8804		$\hat{\beta}$	2.68147	2.7106
	MSE	0.402013	0.449239		MSE	0.241565	0.257378
	Rank	1	2		Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	0.280131	0.295669		$\hat{\lambda}$	0.224435	0.233036
	MSE	0.21808	0.226414		MSE	0.158889	0.163745
	Rank	1	2		Rank	1	2
	$\sum$ Rank	4[1]	5[2]		$\sum$ Rank	4[1]	5[2]

جدول (4)

يوضح متوسط القيم التقديرية للمعلمات ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لطريقتي التقدير (LS، P.C) ولكافة احجام العينات للأنموذج الرابع (α=2 ، β=2.5 ، λ= 1.5)

n	Est.Par	LS	P.C	n	Est.Par	LS	P.C
25	$\hat{\alpha}$	2.00287	1.96296	50	$\hat{\alpha}$	2.03582	2.00962
	MSE	0.0253649	0.0225134		MSE	0.0174133	0.0144324
	Rank	2	1		Rank	2	1
	$\hat{\beta}$	2.07913	2.16269		$\hat{\beta}$	2.35737	2.40371
	MSE	0.370035	0.324428		MSE	0.122936	0.116481
	Rank	2	1		Rank	2	1
	$\hat{\lambda}$	0.965624	0.971362		$\hat{\lambda}$	1.55261	1.54234
	MSE	0.834767	0.771386		MSE	0.37136	0.341407
	Rank	2	1		Rank	2	1
	$\sum$ Rank	6[2]	3[1]		$\sum$ Rank	6[2]	3[1]
75	$\hat{\alpha}$	2.01353	1.99614	100	$\hat{\alpha}$	1.99175	1.98019
	MSE	0.00709769	0.00639692		MSE	0.00532644	0.0052579
	Rank	2	1		Rank	2	1
	$\hat{\beta}$	2.48789	2.51877		$\hat{\beta}$	2.49879	2.52192
	MSE	0.102332	0.10416		MSE	0.091657	0.0930777

	Rank	1	2		Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	1.59617	1.58421		$\hat{\lambda}$	1.44972	1.44397
	MSE	0.286079	0.26566		MSE	0.287319	0.275328
	Rank	2	1		Rank	2	1
	$\sum$ Rank	5[2]	4[1]		$\sum$ Rank	5[2]	4[1]

جدول (5)

يوضح متوسط القيم التقديرية للمعلمات ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لطريقتي التقدير (LS ،P.C) ولكافة احجام العينات للأنموذج الخامس (α=4 ، β=1 ، λ= 0.05)

n	Est.Par	LS	P.C	n	Est.Par	LS	P.C
25	$\hat{\alpha}$	4.99261	5.04541	50	$\hat{\alpha}$	4.22335	4.78394
	MSE	0.68712	1.97458		MSE	0.377838	1.45671
	Rank	1	2		Rank	1	2
	$\hat{\beta}$	1.2859	1.30695		$\hat{\beta}$	1.09943	1.15592
	MSE	0.180041	0.21499		MSE	0.0477218	0.061235
	Rank	1	2		Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	0.95137	0.45741		$\hat{\lambda}$	0.400279	0.47874
	MSE	1.12547	1.23456		MSE	1.08532	1.24574
	Rank	1	2		Rank	1	2
	$\sum$ Rank	3[1]	6[2]		$\sum$ Rank	3[1]	6[2]
75	$\hat{\alpha}$	4.89186	4.16766	100	$\hat{\alpha}$	4.82066	4.06025
	MSE	0.78937	0.331275		MSE	0.9778	0.0222385
	Rank	2	1		Rank	2	1
	$\hat{\beta}$	1.11833	1.12094		$\hat{\beta}$	1.09475	1.07791
	MSE	0.0533586	0.058938		MSE	0.0401279	0.0376109
	Rank	1	2		Rank	2	1
	$\hat{\lambda}$	0.359222	0.399713		$\hat{\lambda}$	0.45733	0.305317
	MSE	0.73909	0.651146		MSE	0.5949	0.228468
	Rank	2	1		Rank	2	1
	$\sum$ Rank	5[2]	4[1]		$\sum$ Rank	6[2]	3[1]