استعمال قاعدة (Topp Leone G-Family) لبناء التوزيعات الاحتمالية[1]

Using the (Topp Leone G-Family) rule to build the probability distributions function

الباحث كنعان عدنان احمد القريشي
Kanaan A.A. AL-Qraishy
kanaan.a@s.uokerbala.edu.iq

أ. د. شروق عبد الرضا سعيد
Shrook A.S AL-Sabbah
shorouq.a@uokerbala.edu.iq

كلية الإدارة والإقتصاد _ جامعة كربلاء
Economics and Administration College - Karbala University

المستخلص

يعد توزيع (Topp Leone) وتوزيع (Rayleigh)، من التوزيعات المستمرة التي تستعمل بكثرة في تحليل دوال البقاء على الحياة ودوال الفشل والمعولِيَة او الموثوقية (Reliability)، عمدت هذه الدراسة الى استعمال توزيع (Topp Leone) كقاعدة لبناء توزيع احتمالي مقترح وذلك عبر اضافة معلمة شكل جديدة لتوزيع (Expanding Rayleigh)، اطلق عليه توزيع (Topp Leon G-Rayleigh Rayleigh)، ويعد امتداداً ومعمماً لتوزيع (Rayleigh). وقامت الدراسة باستخراج بعض خصائص التوزيع الاساسية، وتم تقدير معلماته ودالته المعولِيَة بثلاث طرائق تقدير مختلفة وهي (الامكان الاعظم MLE والمربعات الصغرى الموزونة WLS وطريقة التقليص Shrinkage، وطبقت الدراسة على بيانات حقيقية لأجهزة الطابعة، واستطاعت الدراسة من اثبات ان التوزيع المقترح (TLG-RR) أفضل في تمثيل هذه البيانات وذلك باستعمال اختبارات حسن المطابقة (AIC،AICc)، وتوصلت الدراسة الى ان أفضل طريقة للتقدير هي (Shrinkage) بالاعتماد على المعايير الإحصائية (Mse,IMse).

Abstract:

The (Topp Leone) distribution, the (Rayleigh) distribution. Are among the continuous distributions that are use in the analysis of survival and failure functions and reliability. This study used the (Topp Leone distribution) as a base for constructing a proposed probability distribution by adding a shape parameter to the (Expanding Rayleigh) distribution. It called (Topp Leon G-Rayleigh Rayleigh distribution (TLG-RR)). It is an extension and generalization of the (Rayleigh distribution).This study extracted some

[1] بحث مستل من رسالة ماجستير "بنـاء توزيع احتمـالي باستعمـال قاعـدة (Topp Leone G-Family) لتقدير دالة المعولية مع تطبيق عملي"

basic characteristics of the distribution, and estimate this distribution parameters and reliability function were estimated by three different estimation methods, such as (the greatest potential (MLE), weighted least squares (WLS) and the Shrinkage method. The study applied to real data for printer devices, and the study was able to prove that the proposed distribution (TLG–RR) is better in representing this data By using good conformance tests (AIC, AICc). And the best method for estimation is (shrinkage method), Depending on statistical criteria (Mse, IMse).

الكلمات المفتاحية: (Topp Leone)، (Topp Leon G–family) (الامكان الاعظم MLE)، (المربعات الصغرى الموزونة (WLS)، (طريقة التقليص Shrinkage) (Rayleigh Rayleigh distribution)

1– المقدمة:

تعد التوزيعات الإحصائية المعممة والموسعة من التوزيعات المهمة في عملية نمذجة ودراسة الكثير من الظواهر الطبيعية، حيث من الملاحظ في الآونة الاخيرة ازدياد اهتمام الباحثين في دراسة التوزيعات المعممة المستمرة منها والمتقطعة، وهذه التوزيعات عبارة عن توزيعات احتمالية تنتج من اجراء عملية توسعة او تعميم لتوزيعات احتمالية موجودة يمكن ان تكون هذه التوزيعات أكثر دقةً وملائمةً من التوزيعات الاصلية في تمثيل البيانات التي يصعب تمثيلها بالشكل المطلوب، مما تحتم على الباحث استعمال توزيع قاعدة (TLG–F) لاقتراح توزيع جديد يطلق عليه (TLG–RR) لإجراء الدراسة، من هنا جاءت اهمية دراسة طرائق التقدير المستعملة لتقدير دالة المعولِيّة ومعلمات التوزيع المقترح (TLG–RR)، وهو توزيع معمم لتوزيع (Rayleigh)، والمقارنة بين افضل هذه الطرائق باستعمال أسلوب المحاكاة .

2– هدف البحث

يرمي البحث الى استعمال اسلوب المحاكاة للحصول على أفضل طريقة لتقدير لمعلمات التوزيع المقترح (TLG– RR) ودالة المعَوليِة ($R(x)$) باستعمال طرائق التقدير المختلفة المستعملة في عملية تقدير وهي طريقة الامكان الاعظم (mle) وطريقة المربعات الصغرى الموزونة (wls) وطريقة التقليص (Shrinkage).

3– الجانب النظري

4 – دالة المعولية [1][8] (Reliability function)

وتعرف دالة المعولِيّة بانها دالة لاستمرارية عمل أي جهاز معين او ماكينة او آلة بوقت محدد مقداره (t)، كما يمكن تعريفها بانها دالة قياس لقدرة عمل جزء من الأجزاء المكونة لنظام معين او قياس قدرة عمل النظام بالكامل على ان يكون العمل بصلاحية تامة دون انقطاع او عطل، ويرمز لها بالرمز $R_{(X)}$ وصيغتها الرياضية تعطى بالشكل الاتي :

$$R_{(X)} = P(X > x) = 1 - P(X \le x)$$

$$R_{(X)} = 1 - F(x) \qquad (1)$$

إذ ان:

$F(x)$ تمثل دالة التوزيع التجميعية والتي تعبر عن احتمالية الفشل للجهاز في الزمن t

ان دالة المعوِليَة تتناسب عكسياً مع الزمن أي انه كلما كان زمن اشتغال الماكنة كبيراً كانت قيمة دالة المعوِليَة صغيرة والعكس صحيح أي هي دالة متناقصة زمنياً. [1] وهذا يعني ان قيمتها محصورة بين الصفر والواحد الصحيح ($0 \le R_{(X)} \le 1$)

$$R_{(0)} = p(X < 0) = 1$$

$$R_{(\infty)} = R_{(Max\,(t))} = 0$$

اذاكان $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 \dots\dots\dots < x_\infty$

فان $R(x_1) \ge R(x_2) \ge R(x_3) \ge R(x_4) \ge R(x_5) \dots \ge R(x_\infty)$

5- قاعدة توب ليون المولد (The Topp-leone generator family (TLG-F

لكي نقوم في هذه الطريقة ببناء توزيع احتمالي جديد اكثر مرونة وليونة من التوزيع الاصلي نحتاج لعنصرين رئيسيين، وهما دالة المولد (TL –G family) ودالة ال cdf للتوزيع الأصلي المراد استعماله، اذ يتم دمج العنصران آنفاً لينتج دالة تمثل دالة التوزيع التجميعية cdf وبعدها نقوم بإجراء التفاضل للدالة آنفاً نحصل على دالة احتمالية تمثل دالة الكثافة الاحتمالية pdf للتوزيع الجديد المقترح (TLG-RR) وكما يأتي.[16]

اذا كان (y) متغيراً عشوائياً يتوزع توزيع$y \sim TL(\alpha, \beta)$ Topp-Leone للفترة [1,0]، فان دالة التوليد Topp- Leone G- family)) يمكن الحصول عليها بالشكل الاتي [13,16]:-

$$F_{TLG}(x) = \int_0^{G(x)} f_{TL}(x)dx \qquad (2)$$

$$F_{TLG}(x) = G(x)^{\theta}\big(2 - G(x)\big)^{\theta} \qquad (3)$$

6- التوزيع الاحتمالي المقترح (Topp Leone G-Rayleigh Rayleigh (TLG-RR

سنقوم باستعمال قاعدة توب ليون (Topp Leone-G family) لتوليد توزيع جديد وذلك بإضافة معلمة شكل جديدة ($\theta > 0$) للتوزيع الأصلي (RR distribution) إذ ان دالتيه (pdf) و(cdf) تعطى بالشكل الاتي :[9]

$$\varphi(x,\alpha,\beta)=\frac{x^3}{2\beta^4\alpha^2}\boldsymbol{e}^{-\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}} \quad ;x>0\,;\alpha,\beta>0 \qquad (4)$$

$$\boldsymbol{\varphi}(x,\alpha,\beta)=1-\boldsymbol{e}^{-\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}} \quad ;x>0\,;\alpha,\beta>0 \qquad (5)$$

لبناء توزيع جديد نعوض معادلة رقم (5) في معادلة (3)، أي $F_{TLG}(x)=\boldsymbol{\varphi}(x)^{\theta}\big(2-\boldsymbol{\varphi}(x)\big)^{\theta}$ عندما $\boldsymbol{\varphi}(x)$ تمثل دالة التوزيع التجميعية cdf للتوزيع الأصلي (R.R distribution)، ومنها نحصل على توزيع احتمالي جديد ذات ثلاث معلمات اطلقنا عليه اسم Topp Leone G–Rayleigh Rayleigh (TLG–RR) اذ يعد امتداداً لتوزيع رايأتي وكالاتي :

$$F_{TLGRR}(x,\alpha,\beta,\theta)=[1-e^{-\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}}]^{\theta}\,[2-(1-e^{-\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}})]^{\theta}$$

$$=(1-e^{-\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}})^{\theta}[2-1+e^{-\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}}]^{\theta} \;=(1-e^{-\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}})^{\theta}(1+e^{-\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}})^{\theta}$$

عليه فان دالة التوزيع التجميعية cdf للتوزيع المقترح (TLG–RR) تعطى بالشكل الاتي: –

$$F_{TLGRR}(x,\alpha,\beta,\theta) = \begin{cases}(1-e^{-\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}})^{\theta}\;\;(1+e^{-\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}})^{\theta} & ;x>0\,;\alpha,\beta>0 \\ \\ 0 & ;\quad e.w\end{cases} \qquad (6)$$

إذ ان $F_{TLGRR}(x,\theta,\beta,\alpha)$ تمثل الدالة التجميعية لتوزيع (*TLGRR*).

وباستعمال التفاضل للمعادلة (6) نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية (pdf) للتوزيع المقترح (*TLG–RR*) وكما يأتي: –

$$f_{TLGRR}(x,\alpha,\beta,\theta)=\frac{dF_{TLGRR}(x,\alpha,\beta,\theta)}{dx}=\frac{d(1-e^{-\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}})^{\theta}(1+e^{-\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}})^{\theta}}{dx}$$

$$f(x,\alpha,\beta,\theta) = \begin{cases}\theta\,\frac{x^3}{\beta^4\alpha^2}\;\,e^{-\frac{x^4}{4\beta^4\alpha^2}}\;\,(1-e^{-\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}})^{\theta-1}\;\,(1+e^{-\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}})^{\theta-1} & ;x>\alpha,\beta,\theta>0 \\ \\ 0 & ;\quad e.w\end{cases} \qquad (7)$$

اذ ان $\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\beta}$ هما معلمتا شكل وان $\boldsymbol{\alpha}$ هي معلمة قياس ويمكن اثبات التوزيع المقترح $(TLG-RR)$ هو دالة احتمالية pdfفي الخطوات الاتية-:

$$\int_0^{\infty} f_{TLGRR}(x,\alpha,\beta,\theta)dx=1$$

$$= \int_0^{\infty} \theta \frac{x^3}{\beta^4\alpha^2} e^{-\frac{x^4}{4\beta^4\alpha^2}} (1 - e^{-\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}})^{\theta-1} (1 + e^{-\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}})^{\theta-1} dx$$

$$let\ x^4 = u \rightarrow x = u^{\frac{1}{4}} \rightarrow dx = \frac{1}{4} u^{\frac{-3}{4}} du$$

عليه فان $\int_0^{\infty} f_{TLGRR}(u,\alpha,\beta,\theta) du$

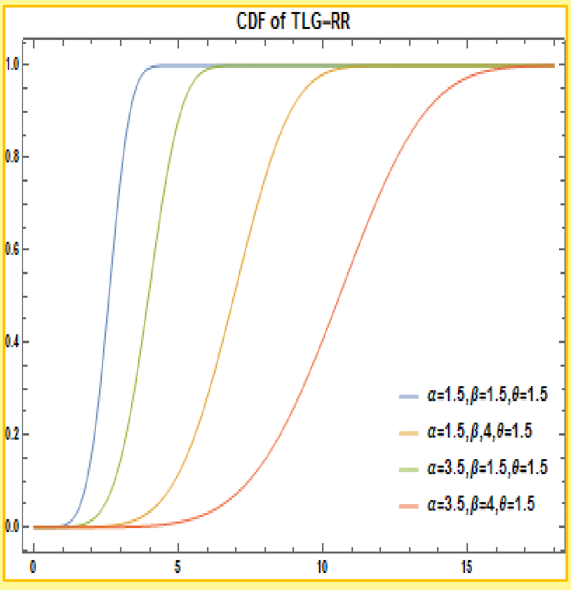
$$= \int_0^{\infty} \theta \frac{u^{\frac{3}{4}}}{\beta^4\alpha^2} e^{-\frac{u}{4\beta^4\alpha^2}} (1 - e^{-\frac{u}{8\beta^4\alpha^2}})^{\theta-1} (1 + e^{-\frac{u}{8\beta^4\alpha^2}})^{\theta-1} \frac{1}{4} u^{\frac{-3}{4}} du$$

عليه فان $\int_0^{\infty} f_{TLGRR}(u,\alpha,\beta,\theta) du = \left[\frac{\theta \left[(1-e^{-\frac{u}{8\beta^4\alpha^2}})(1+e^{-\frac{u}{8\beta^4\alpha^2}}) \right]^{\theta}}{\theta} \right]_0^{\infty}$

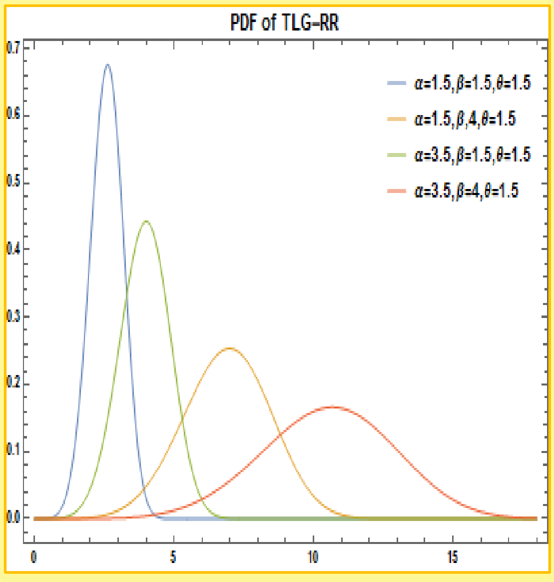
$$= [(1 + e^{-\infty})(1 - e^{-\infty}]^{\theta} - [(1 + e^{0})(1 - e^{0})]^{\theta}$$

$$= [(1 + 0)(1 - 0)]^{\theta} - [(1 + 1)(1 - 1)]^{\theta} = 1 - 0 = 1$$

والشكليين(*1*) و(*2*) يمثلان دالة الكثافة الاحتمالية *pdf* ودالة التوزيع التراكمية *cdf* لتوزيع (*TLG–RR*) على التوالي:



شكل (*2*) يمثل دالة الكثافة الاحتمالية *pdf* للتوزيع المقترح (*TLG-RR*)



شكل (*1*) يمثل دالة الكثافة الاحتمالية *pdf* للتوزيع المقترح (*TLG-RR*)

وان دالتي المعولِيَة (Reliability) ودالة المخاطرة (hazard rate) لتوزيع (TLG–RR) تعطى بالشكل الاتي:

$$R_{(t)} = 1 - [\ (1 + e^{-\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}})^{\theta} (1 - e^{-\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}})^{\theta}]\ \ ; x > 0\ ; \alpha,\beta,\theta > 0 \qquad (8)$$

$$h_{(x)}=\frac{\theta\frac{x^3}{\beta^4\alpha^2}e^{-\frac{x^4}{4\beta^4\alpha^2}}(1+e^{-\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}})^{\theta-1}(1-e^{-\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}})^{\theta-1}}{1-\ (1+e^{-\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}})^{\theta}(1-e^{-\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}})^{\theta}};x>0\,;\alpha,\beta,\theta>0 \quad (9)$$

7- بعض خصائص التوزيع المقترح الأساسية (properties of new distribution):-

8- العزم المركزي الرائي غير المركزي حول نقطة الأصل:[4,6] decentralized Moment

يرمز للعزم اللامركزي الرائي بالرمز $\boldsymbol{\mu_r}$ ويعطى بالشكل الاتي:-

$$\boldsymbol{\mu_r}=E(x^r)=\int_0^\infty x^r f(x)dx \quad (10)$$

$$E(x^r)=\int_0^\infty x^r\theta\frac{x^3}{\beta^4\alpha^2}e^{-\frac{x^4}{4\beta^4\alpha^2}}(1+e^{-\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}})^{\theta-1}(1-e^{-\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}})^{\theta-1}dx$$

وباستعمال مفكوك ثنائي ذي الحدين يمكن إيجاد المقادير الاتية :

$$(1+e^{-\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}})^{\theta-1}=\sum_{j=0}^{\theta-1}\binom{\theta-1}{j}e^{-j\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}}$$

$$(1-e^{-\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}})^{\theta-1}=\sum_{j=0}^{\theta-1}\binom{\theta-1}{k}(-1)^k e^{-k\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}}$$

عليه فان الصيغة النهائية للعزم اللامركزي الرائي لتوزيع (**TLG-RR**) تعطى بالشكل الاتي:-

$$\mu_r=E(x^r)=\frac{\theta}{4\beta^4\alpha^2}\sum_{j=0}^{\theta-1}\sum_{k=0}^{\theta-1}\binom{\theta-1}{k}\frac{\Gamma(\theta)}{\Gamma(\theta-j)\,j!}(-1)^k\,[\frac{1}{4\beta^4\alpha^2}\Big(\frac{j}{2}+\frac{k}{2}+1\Big)]^{\frac{r+4}{4}}\Gamma\Big(\frac{r+4}{4}\Big) \quad (11)$$

r=1,2,3,……,n

اذا كان ***r=1*** فان العزم اللامركزي الأول (الوسط الحسابي) يعطى بالشكل الاتي:-

$$\mu_{1=}E(x)=\frac{\theta}{4\beta^4\alpha^2}\sum_{j=0}^{\theta-1}\sum_{k=0}^{\theta-1}\binom{\theta-1}{k}\frac{\Gamma(\theta)}{\Gamma(\theta-j)\,j!}(-1)^k\,[\frac{1}{4\beta^4\alpha^2}\Big(\frac{j}{2}+\frac{k}{2}+1\Big)]^{\frac{5}{4}}\Gamma(\frac{5}{4}) \quad (12)$$

اذا كان ***r=2*** فان العزم اللامركزي الثاني يعطى بالشكل الاتي:-

$$\mu_2 = E(x^2) = \frac{\theta}{4\beta^4\alpha^2}\sum_{j=0}^{\theta-1}\sum_{k=0}^{\theta-1}\binom{\theta-1}{k}\frac{\Gamma(\theta)}{\Gamma(\theta-j)\, j!}(-1)^k \left[\frac{1}{4\beta^4\alpha^2}\left(\frac{j}{2}+\frac{k}{2}+1\right)\right]^{\frac{6}{4}}\Gamma\left(\frac{6}{4}\right) \qquad (13)$$

9- العزم الرائي المركزي للتوزيع عن الوسط الحسابي Central moments:[10,7]

العزوم المركزية او ما تسمى بالعزوم حول الوسط الحسابي وصيغتها تعطى بالشكل الاتي:

$$E(x-\mu)^r = \int_0^\infty (x-\mu)^r f(x)dx \qquad (14)$$

$$E(x-\mu)^r = \int_0^\infty (x-\mu)^r \theta \frac{x^3}{\beta^4\alpha^2} e^{-\frac{x^4}{4\beta^4\alpha^2}}(1-e^{-\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}})^{\theta-1}(1-e^{-\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}})^{\theta-1}dx$$

عليه فان الصيغة العامة للعزم المركزي الرائي لتوزيع (TLG-RR) تعطى بالشكل الاتي:-

$$E(x-\mu)^r = \{\frac{\theta}{4\beta^4\alpha^2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\theta-1}\sum_{k=0}^{\theta-1}\binom{r}{i}\binom{\theta-1}{k}(-1)^{r+k}\frac{\Gamma(\theta)}{\Gamma(\theta-j)\, j!}\mu^r \Gamma\left(\frac{r-i+4}{4}\right)\left[\frac{1}{4\beta^4\alpha^2}\left(\frac{j}{2}+\frac{k}{2}+1\right)\right]^{\frac{r-i+4}{4}}\} \qquad (15)$$

r=1,2,3,…,n

10- الدالة المولدة للعزوم (Moment generating function)

$$\mu_x^t = E(e^{xt}) = \int_0^\infty e^{xt} f(x)dx \qquad (16)$$

$$\int_0^\infty e^{xt}\theta \frac{x^3}{\beta^4\alpha^2} e^{-\frac{x^4}{4\beta^4\alpha^2}}(1+e^{-\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}})^{\theta-1}(\,1-e^{-\frac{x^4}{8\beta^4\alpha^2}})^{\theta-1}dx$$

لكن $e^{xt} = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(tx)^s}{s!}$ (17)

عليه فان الدالة المولدة للعزوم للتوزيع المقترح (TLG-RR) تعطى بالشكل الاتي:

$$\mu_x^t = \frac{\theta}{4\beta^4\alpha^2}\sum_{j=0}^{\theta-1}\sum_{k=0}^{\theta-1}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(t)^s}{s!}\binom{\theta-1}{k}(-1)^k \Gamma\left(\frac{s+4}{4}\right)\left[\frac{1}{4\beta^4\alpha^2}\left(\frac{j}{2}+\frac{k}{2}+1\right)\right]^{\frac{s+4}{4}} \qquad (18)$$

11-التقدير Estimation

11-1- طريقة الإمكان الاعظم Maximum likelihood method (MLE) [12] [11]

تعد طريقة الإمكان الأعظم (MLE) من اكثر الطرق استعمالاً في تقدير المعلمات التوزيعات الاحتمالية مع الأخذ بنظر الاعتبار البيانات المرصودة، وذلك لما تتمتع به هذه الطريقة من خواص مثل عدم التحيز والكفاءة والاتساق، وان منطق طريقة الامكان الاعظم بديهي ومرن، وعلى هذا النحو أصبحت هذه الطريقة وسيلة سائدة للاستدلال الإحصائي, اذ تعتمد مبدأ تعظيم الدالة الاحتمالية، ويمكن تعظيم دالة الإمكان الأعظم مباشرة باستخدام برنامج SAS [15] (PROC NLMIXED) او برنامج Ox (subroutine Max BFGS) أو عن طريق حل المعادلات العادية غير الخطية التي تم الحصول عليها وكالاتي[19]: -

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots\dots, x_n, \alpha, \beta, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \alpha, \beta, \theta) \qquad (19)$$

$$\boldsymbol{L} = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta, \beta, \alpha) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta {x_i}^3}{\beta^4 \alpha^2} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^4}{4\beta^4\alpha^2}} \prod_{i=1}^{n} (1 - e^{-\frac{{x_i}^4}{4\beta^4\alpha^2}})^{\theta-1}$$

وباخذ ال $(\boldsymbol{ln})$ للطرفين واجراء التفاضل الجزئي بالنسبة للمعلمات نحصل على الاتي:-

$$lnL = n\, ln\, \theta - 4n\, ln\, \beta - 2n\, ln\, \alpha + 3n \sum_{i=1}^{n} ln x_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^4}{4\beta^4\alpha^2} + (\theta - 1)\, ln\left(1 - e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^4}{4\beta^4\alpha^2}}\right) \qquad (20)$$

وبالاشتقاق الجزئي للمعادلة **(19)** بالنسبة للمعلمات $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$ ومساواتها بالصفر نحصل على

$$\frac{\partial lnL}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} + ln\left(1 - e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^4}{4\beta^4\alpha^2}}\right) = 0$$

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{ln}\left(\boldsymbol{1} - \boldsymbol{e}^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^4}{4\beta^4\alpha^2}}\right)} \qquad \textbf{(21)}$$

$$\frac{\partial lnL}{\partial \beta} = -\frac{4n}{\beta} + 4\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^4}{4\beta^5\alpha^2} - (\theta - 1)4\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^4 (1 - e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^4}{4\beta^4\alpha^2}})}{4\alpha^2\beta^5} = 0$$

$$\hat{\beta} = \sqrt[4]{\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^4 - (\theta - 1)\sum_{i=1}^{n} {x_i}^4\, (1 - e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^4}{4\beta^4\alpha^2}})}{4n\alpha^2}} \qquad (22)$$

$$\frac{\partial lnL}{\partial\alpha}=-\frac{2n}{\alpha}+\frac{2\sum_{i=1}^{n}{x_i}^4}{4\beta^4\alpha^3}-2(\theta-1)\frac{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^4\left(1-e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^4}{4\beta^4\alpha^2}}\right)}{4\alpha^3\beta^4}=0$$

$$\hat{\alpha}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^4-(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}{x_i}^4\left(1-e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^4}{4\beta^4\alpha^2}}\right)}{4n\beta^4}} \quad (23)$$

تحل المعادلات (21)،(22)،(23)، بالطرائق العددية نحصل على مقدرات الملمات تعوض في المعادلة (8) نحصل على مقدر دالة المعولية للتوزيع المقترح (*TLG-RR*) بطريقة (*MLE*).

11-2- طريقة المربعات الصغرى الموزونة weighted Least Squares Method WLS [3,17]

تختلف طريقة المربعات الصغرى الموزونة (***WLS***) عن طريقة المربعات الصغرى العادية (*OLS*) هو وجود الوزن (*W*) أي اذا كان (*w=1*) تكون الطريقة مربعات صغرى عادية واذا كان ($w\neq 1$) فانها مربعات صغرى موزونة

وان الصيغة العامة لطريقة المربعات الصغرى الموزونة تعطى بالشكل الاتي:-

$$Q=\sum_{k=1}^{m}w(F(x_k)-\frac{k}{m+1})^2 \quad (24)$$

إذ ان: Q تمثل المقدر لدالة التوزيع التجميعية $\hat{F}(x_k)$ وان w يمثل الوزن وقيمته هي $\frac{(\bar{n}+1)^2(\bar{n}+2)}{i(\bar{n}-i+1)}$

$F(x_k)$ دالة التوزيع التجميعية لتوزيع جي رايأتي رايأتي (*TLG-RR*) المقترح *وان* $\frac{k}{m+1}$ هو مقدار لامعلمي

وبأخذ الاشتقاق الجزئي للمعادلة رقم (*24*) بالنسبة للمعلمات (θ,β,α) ومساواتها بالصفر نحصل على الاتي:-

$$\frac{\partial Q}{\partial\theta}=2\sum_{k=1}^{m}w_k[F(x_k)-\frac{k}{m+1})]\left[\frac{\partial F(x_k)}{\partial\theta}\right]=0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial\beta}=2\sum_{k=1}^{m}w_k\left[F(x_k)-\frac{k}{m+1}\right)]\left[\frac{\partial F(x_k)}{\partial\beta}\right]=0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial\alpha}=2\sum_{k=1}^{m}w_k\left[F(x_k)-\frac{k}{m+1}\right)]\left[\frac{\partial F(x_k)}{\partial\alpha}\right]=0 \quad (27)$$

بعد إيجاد قيم مقادير المعادلات (27,26,25) وقيمة الوزن w_k بطريقة الحل العددية وتعويضها في المعادلة (8) نحصل على مقدر دالة المعولية التوزيع (*TLG-RR*) بطريق المربعات الصغرى الموزونة (*WLS*)

3-11- طريقة التقليص (الطريقة المختلطة) Shrinkage Technique[12,18]

تتلخص هذه الطريقة بانه عندما يكون هنالك مقدران لمعلمات الانموذج المقترح من طريقتين مختلفتين يمكننا في هذه الطريقة تكوين مقدر ثالث يكون تركيبا خطيا خليطاً من المقدرين المعلومين، فإذا فرضنا ان$(\hat{\theta}_1,\hat{\beta}_1,\hat{\alpha}_1)$هي مقدرات طريقة الامكان الأعظم، وان$(\hat{\theta}_2,\hat{\beta}_2,\hat{\alpha}_2)$ هي مقدرات المربعات الصغرى الموزونة، فان المقدرات الجديدة التي تعد خليطا من المقدرات آنفاً ويمكن ان نرمز لها بالرمز $(\hat{\theta}_m,\hat{\beta}_m,\hat{\alpha}_m)$ والتي يمكن ان نوضحها بالمعادلات الاتية:

$$\hat{\theta}_m = \mathrm{P}\hat{\theta}_1 + (1-P)\hat{\theta}_2 \qquad \mathbf{(28)}$$

إذ ان p يمثل قيمة ثابتة $(0 \le P \le 1)$ التي تجعل قيمة(Mse) اصغر ما يمكن وذلك حسب الخطوات الاتية:

نطرح من θ الطرفين

$$\hat{\theta}_m - \theta = \mathrm{P}\hat{\theta}_1 + (1-\mathrm{P})\hat{\theta}_2 \ - \theta$$

$$\left[\hat{\theta}_m - \theta\right]^2 = \{P^2\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta\right) - \left(\hat{\theta}_2 - \theta\right)\right]^2 + \left[\hat{\theta}_2 - \theta\right]^2 + 2P\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta\right) - \left(\hat{\theta}_2 - \theta\right)\right]\left[\hat{\theta}_2 - \theta\right]\}$$

نظيف وطرح المقدار $(P\theta)$

$$\hat{\theta}_m - \theta = P\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 - P\hat{\theta}_2 - \theta + P\theta - P\theta$$

$$\hat{\theta}_m - \theta = P\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta\right) - \left(\hat{\theta}_2 - \theta\right)\right] + \left[\hat{\theta}_2 - \theta\right]$$

نربع الطرفين

$$\left[\hat{\theta}_m - \theta\right]^2 = P^2\left[\hat{\theta}_1 - \theta\right]^2 + P^2\left[\hat{\theta}_2 - \theta\right]^2 - 2P^2\left[\hat{\theta}_1 - \theta\right]\left[\hat{\theta}_2 - \theta\right] + \left[\hat{\theta}_2 - \theta\right]^2 + 2P\left[\hat{\theta}_1 - \theta\right]\left[\hat{\theta}_2 - \theta\right] - 2\mathrm{P}\left[\hat{\theta}_2 - \theta\right]^2$$

وبإدخال التوقع للطرفين نحصل على الاتي:

$$Mse\left(\hat{\theta}_m\right) = P^2 Mse\left(\hat{\theta}_1\right) + P^2 Mse\left(\hat{\theta}_2\right) - 2P^2 Cov\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right) + Mse\left(\hat{\theta}_2\right) + 2P Cov\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right) - 2P Mse\left(\hat{\theta}_2\right) \qquad (29)$$

الآن سنقوم بإجراء التفاضل الجزئي للمعادلة (28) بالنسبة للثابت P ونساويها الى الصفر وكالاتي:

$$\frac{\partial Mse\left(\hat{\theta}_m\right)}{\partial P} = 2\mathrm{P}\ Mse\left(\hat{\theta}_1\right) + 2\mathrm{P}\ Mse\left(\hat{\theta}_2\right) - 4\mathrm{P}\ Cov\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right) + 2Cov\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right) - 2\ Mse\left(\hat{\theta}_2\right)$$

$$(30) = \mathrm{P}\ Mse\left(\hat{\theta}_1\right) + \mathrm{P}\ Mse\left(\hat{\theta}_2\right) - 2\mathrm{P}\ Cov\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right) + Cov\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right) - Mse\left(\hat{\theta}_2\right)$$

بعد الحصول على قيمة الثابت P فان المقدر الجديد المختلط بالنسبة للمعلمة θ يكون كالاتي :

$$New\ Shrinkage\ Estimated\ = P\hat{\theta}_{mle} + (1-P)\hat{\theta}_{m} \quad (31)$$

ويمكن تطبيق نفس الخطوات السابقة على المعلمتين الآخرتين (β,α) نحصل على قيم مقدراتها

بعد إيجاد قيم مقادير المعلمات بطريقة الحل العددية وتعويضها في المعادلة (8) نحصل على مقدر دالة المعولية التوزيع (*TLG−RR*) بطريق التقليص (*Shrinkage*)

12- المحاكاة (Simulation)[2,5,20]:

وهي طريقة او أسلوب تعليمي يستعمل عادةً لتمثيل الواقع الحقيقي الذي يصعب الوصول اليه بواقع افتراضي تصوري يشبهه لحدٍما، أي إعطاء نسخة فرضية تكون طبق الأصل من الواقع الأصلي او العالم الواقعي لنظام معين او أنموذج محدد، من دون التطرق لهذا الانموذج او النظام بشكل مباشر، ويتم استعمال أسلوب المحاكاة التجريبي نتيجة لدرجة التعقيد الكبيرة في اغلب النظريات الإحصائية الرياضية والعمليات الهندسية والتجارب الطبية والحياتية، والصعوبة الكبيرة التي يواجهها الباحثون في تحليلها واثباتها، لذا يلجأ الباحثون الى استعمال أسلوب المحاكاة لتمثيلها في مجتمعات افتراضية وهمية تشبه لحدٍ ما النماذج الاصلية الحقيقية، مما تحقق لنا قدراً كافياً من الفهم والادراك للواقع الحقيقي، وذلك عبر سحب عينات عشوائية مختلفة الاحجام بغية الوصول للحلول المثلى لهذه النظريات والمشكلات.

13- مراحل تجربة المحاكاة (Simulation stages):

يتم بناء تجربة المحاكاة على شكل مراحل متسلسلة بهدف الحصول على افضل تقدير لمعلمات ودالة المعولية للتوزيع المقترح (TLG−RR)، وذلك بالاستعانة ببرنامج (Wolfram Mathematica 12.2) ووفقاً للمراحل الاتية:

- **المرحلة الأولى (The first stage):**

يتم في هذه المرحلة اختيار قيم افتراضية وكما مبين بالجدول الاتي:

جدول رقم (1)

القيم الافتراضية للمعلمات والنماذج المقترحة

MODLE	θ	β	α
1	1.5	1.5	1.5
2	1.5	1.5	3
3	1.5	4	1.5
4	1.5	4	3

الجدول: من اعداد الباحثين

ويتم في هذه المرحلة اختيار اربع حجوم مختلفة وهي (25,50,100,200), بهدف معرفة مدى تأثير هذا التغير في حجم العينة على دقة نتائج التقدير ، اذ قمنا بتكرار التجربة (1000) مرة .

- **المرحلة الثانية (The second stage):**

في هذه المرحلة من المحاكاة يتم توليد البيانات عشوائية بما ينسجم مع التوزيع الاحتمالي المقترح (TLG−RR) باستعمال البرنامج الإحصائي (Wolfram Mathematica 12.2).

- **المرحلة الثالثة (The third stage):**

في هذه المرحلة يتم القيام بعملية تقدير قيم معلمات التوزيع الاحتمالي المقترح (TLG−RR) ولجميع طرائق التقدير التي تم التطرق لها في الفصل الثاني ضمن الجانب النظري من الرسالة .

- **المرحلة الرابعة (The forth stage):**

في هذه المرحلة نقوم بتقدير دالة المعولية $(R_{(x)})$ للأنموذج الاحتمالي (TLG−RR) ولكافة طرائق التقدير آنفاً.

- **المرحلة الخامسة (The five stage):**

وهي المرحلة الاخيرة من مراحل المحاكاة يتم فيها المقارنة بين طرائق التقدير المختلفة المستعملة في عملية التقدير، وذلك بالاعتماد على المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE)، لكون المعيار متوسط مربعات الخطأ يحسب لكل (ti) من الزمن، وان المعيار (IMSE) يمثل المساحة الكلية للزمن (ti).

والجدول (2) يبين القيم الحقيقية لدالة المعولية ومقدراتها ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب لجميع طرائق التقدير المستعملة بالنسبة للأنموذج الاول وبحسب حجوم العينات المفترضة (α=1.5,β=1.5,θ=1.5)

جدول (2)

	ti	$R.Real$	$\hat{R}.Mle$	Mse	$\hat{R}.Wls$	Mse	$\hat{R}.Shr$	Mse
	1.64815	0.942187	0.939307	0.0012838	0.925665	0.002048	0.940201	**0.000394405**
	1.9264	0.866774	0.864095	0.0032325	0.847339	0.00419868	0.862286	**0.000201366**
5	2.01323	0.833455	0.830513	0.0040147	0.813771	0.00491945	0.827943	**0.000303786**
	2.14854	0.771682	0.767678	0.005259	0.752233	0.0059164	0.764419	**0.000527515**
	2.20323	0.743413	0.738715	0.0057295	0.724262	0.00624071	0.735416	**0.000639512**
	2.	0.	0.	0.007	0.	0.006	0.	**0.000**

	63728	470934	457402	1822	45813	60431	458384	**557504**
	2.69127	0.434549	0.420127	0.007020	0.423045	0.00641734	0.421794	**0.000562704**
	2.95032	0.270441	0.25522	0.0053996	0.266338	0.00505764	0.258315	**0.000147042**
	2.97731	0.255075	0.240139	0.0051686	0.25179	0.00487731	0.243163	**0.000341891**
	3.13828	0.173033	0.160977	0.0036895	0.174345	0.00370432	0.016285	**0.000303562**
IMSE			0.004798		0.004998		**0.0003979**	
Rank of method			2		3		**1**	
	ti	$\boldsymbol{R.Real}$	$\hat{R}.Mle$	Mse	$\hat{R}.Wls$	Mse	$\hat{R}.Shr$	**Mse**
0	1.64815	0.942187	0.941698	0.000576262	0.936094	0.000714672	0.949647	**5.56542E-05**
	1.9264	0.866774	0.86926	0.00138574	0.862214	0.00152746	0.880082	**0.000177112**
	2.01323	0.833455	0.837141	0.00167933	0.830096	0.00180063	0.848719	**0.000232992**
	2.14854	0.771682	0.777265	0.00210473	0.770831	0.00218639	0.789846	**0.000329924**
	2.20323	0.743413	0.749721	0.00225146	0.743762	0.00231939	0.762635	**0.000369518**
	2.63728	0.470934	0.480627	0.00275653	0.482104	0.00291387	0.49372	**0.000519199**
	2.69127	0.434549	0.444349	0.00275758	0.446912	0.00294734	0.457011	**0.000504524**
	2.95032	0.270441	0.280162	0.00251105	0.286825	0.00285386	0.289144	**0.000349805**
	2.97731	0.255075	0.264744	0.00245275	0.271676	0.00280781	0.273221	**0.000329273**
	3.13828	0.173033	0.182229	0.00197472	0.190019	0.00237019	0.18751	**0.000209593**
IMSE			0.002045		0.002244		**0.000308**	
Rank of method			2		3		**1**	
	ti	$\boldsymbol{R.Real}$	$\hat{R}.Mle$	Mse	$\hat{R}.Wls$	Mse	$\hat{R}.Shr$	**Mse**

00	1.64815	0.942187	0.941442	0.000262863	0.939692	0.000356274	0.944525	**5.46633E−06**
	1.9264	0.866774	0.866921	0.000591857	0.864884	0.000781485	0.87105	**0.000018291**
	2.01323	0.833455	0.833992	0.000704453	0.831993	0.000921582	0.838405	**2.45002E−05**
	2.14854	0.771682	0.772867	0.000866615	0.771069	0.0011134	0.777662	**3.57549E−05**
	2.20323	0.743413	0.744858	0.000924089	0.74319	0.00117669	0.749781	**4.05621E−05**
	2.63728	0.470934	0.473976	0.00116687	0.474012	0.00136649	0.478914	**6.36765E−05**
	2.69127	0.434549	0.437712	0.00116669	0.437986	0.00135805	0.442473	**6.27782E−05**
	2.95032	0.270441	0.273951	0.00102059	0.275173	0.00119035	0.277271	**4.66402E−05**
	2.97731	0.255075	0.258598	0.000990245	0.25989	0.00115822	0.261724	**4.42135E−05**
	3.13828	0.173033	0.176526	0.000763882	0.178095	0.000913412	0.178448	**2.93202E−05**
IMSE			0.000846		0.001034		**3.71E−05**	
Rank of method			2		3		**1**	
	ti	$\boldsymbol{R.Real}$	$\hat{R}.Mle$	Mse	$\hat{R}.Wls$	Mse	$\hat{R}.Shr$	**Mse**
00	1.64815	0.942187	0.9411	0.000123638	0.940385	0.000135813	0.942542	**1.25733E−07**
	1.9264	0.866774	0.865515	0.000291481	0.864661	0.000309888	0.867277	**2.53542E−07**
	2.01323	0.833455	0.832177	0.000350277	0.831341	0.000368549	0.833984	**2.79232E−07**
	2.14854	0.771682	0.770401	0.000434935	0.769667	0.000451213	0.772217	**2.85713E−07**
	2.20323	0.743413	0.742138	0.000464443	0.741472	0.000479802	0.743937	**2.74817E−07**
	2.63728	0.470934	0.46992	0.000562044	0.470205	0.000601822	0.471144	**4.4056E−08**
	2.69127	0.434549	0.433605	0.000556591	0.434027	0.000604251	0.434704	**2.39587E−08**

	2.95032	0.270441	0.269966	0.000467538	0.270923	0.000546236	0.270362	**6.2259E-09**
	2.97731	0.255075	0.254657	0.000452157	0.255651	0.000532116	0.254978	**9.46188E-09**
	3.13828	0.173033	0.172963	0.000342849	0.174085	0.000419174	0.172859	**3.03743E-08**
IMSE			0.000405		0.000445		**1.33E-07**	
Rank of method			2		3		**1**	
	Overall Rank		8_2		12_3		$\mathbf{4_1}$	
Best Method					Shrinkage			

والجدول (3) الآتي يبين القيم التقديرية لمعلمات التوزيع المقترح (TLG-RR) ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية والكلية لطرائق التقدير للأنموذج الاول وبحسب حجوم العينات المفترضة

جدول (3)

n	Estimate Parameter	MLE	WLS	SHR
25	parameters α	1.53361	1.554138664	1.53803
	MSE	0.00390936_2	0.00881628_3	0.00144664_1
	parameters β	1.46008	1.486706027	1.47021
	MSE	0.00938377_2	0.0103148_3	0.000887342_1
	parameters θ	1.69141	1.505140179	1.50419
	MSE	0.393692_4	0.292459_2	$1.75279\text{E-}05_1$
	$\sum \boldsymbol{Ranks}$	$8_{2.5}$	$8_{2.5}$	3_1
50	parameters α	1.53166	1.532872901	1.53175
	MSE	0.00214869_2	0.00303386_3	0.0010079_1
	parameters β	1.49329	1.51033542	1.49314
	MSE	0.00386562_3	0.0033132_2	$4.70579\text{E-}05_1$

	parameters θ	1.55409	1.470468903	1.55493
	MSE	0.1334_3	0.113579_2	0.00301739_1
	∑ ***Ranks***	8_3	7_2	3_1
100	parameters α	1.52018	1.516280587	1.51837
	MSE	0.00114719_2	0.00125787_3	0.000337536_1
	parameters β	1.49411	1.50010175	1.49502
	MSE	0.00205129_2	0.0025562_3	$2.47874E-05_1$
	parameters θ	1.51324	1.499772881	1.51361
	MSE	0.0362531_2	0.0513805_3	0.000185298_1
	∑ ***Ranks***	6_2	9_3	3_1
200	parameters α	1.51359	1.508556654	1.51134
	MSE	0.000590524_2	0.000663044_3	0.000128576_1
	parameters β	1.49376	1.49874945	1.49368
	MSE	0.000909977_2	0.00117144_3	$3.99475E-05_1$
	parameters θ	1.50264	1.493620111	1.50457
	MSE	0.0174162_2	0.0211221_3	$2.08904E-05_1$
	∑ ***Ranks***	6_2	9_3	3_1
	∑∑ ***Ranks***	**28_2**	**33_3**	**12_1**
Best Method			Shrinkage	

والجدول (4) يبين القيم الحقيقية لدالة المعولية ومقدراتها ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرُّتب الجزئية والكلية لجميع طرائق التقدير المستعملة في عملية التقدير بالنسبة للأنموذج الثاني وبحسب حجوم العينات المفترضة (α=1.5,β=1.5,θ=3)

جدول (4)

n	ti	$R.Real$	$\hat{R}.Mle$	Mse	$\hat{R}.Wls$	Mse	$\hat{R}.Shr$	Mse
25	1.54929	0.998324	0.997242	1.13644E-05	0.995223	3.98379E-05	0.999238	8.3609E-07
	2.54833	0.779978	0.779395	0.00427354	0.767889	0.00481644	0.811124	0.000970046
	2.64388	0.715348	0.713915	0.0053169	0.704903	0.00562545	0.748031	0.00106815
	2.93169	0.483461	0.47836	0.00758612	0.481071	0.00737329	0.511037	0.000760458
	2.99934	0.426718	0.421253	0.00762161	0.426781	0.00746954	0.451392	0.000608808
	3.00753	0.419931	0.414447	0.0076078	0.420298	0.00746857	0.444228	0.000590369
	3.07172	0.367731	0.362296	0.00736285	0.370501	0.00735809	0.388957	0.000450515
	3.09464	0.349621	0.344287	0.00721839	0.353245	0.00727328	0.369716	0.00040384
	3.50502	0.105346	0.105777	0.00241802	0.118426	0.00316752	0.109205	0.00014894
	3.74622	0.0392629	0.0416269	0.000687615	0.0503764	0.00111772	0.039728	2.16271E-07
IMSE			0.00501		0.005171		0.000487	
Rank of method			2		3		1	
n	ti	$R.Real$	$\hat{R}.Mle$	Mse	$\hat{R}.Wls$	Mse	$\hat{R}.Shr$	Mse
50	1.54929	0.998324	0.997859	4.5267E-06	0.997219	8.93101E-06	0.998707	1.46379E-07
	2.54833	0.779978	0.7831	0.00208527	0.776814	0.00216455	0.79306	0.000171132
	2.64388	0.715348	0.718356	0.00244097	0.712782	0.00250146	0.729463	0.00019923
	2.93169	0.483461	0.484308	0.00308687	0.483147	0.00310508	0.497077	0.000185401
	2.99934	0.426718	0.427056	0.00309928	0.427075	0.00311421	0.439469	0.00016259

n	ti	$\boldsymbol{R}.Real$	$\hat{R}.Mle$	Mse	$\hat{R}.Wls$	Mse	$\hat{R}.Shr$	Mse
	3.00753	0.419931	0.420216	0.00309558	0.420373	0.00311058	0.432563	**0.00015956**
	3.07172	0.367731	0.36768	0.00302383	0.36886	0.00304366	0.379338	**0.000134722**
	3.09464	0.349621	0.349486	0.00297929	0.351	0.00300277	0.36083	**0.000125646**
	3.50502	0.105346	0.106225	0.00114428	0.109978	0.00126772	0.109352	**1.60502E-05**
	3.74622	0.0392629	0.0407304	0.000344956	0.0433735	0.000423439	0.0408103	**2.39421E-06**
IMSE			0.00213		0.002174		**0.000116**	
Rank of method			2		3		**1**	
n	ti	$\boldsymbol{R}.Real$	$\hat{R}.Mle$	Mse	$\hat{R}.Wls$	Mse	$\hat{R}.Shr$	**Mse**
100	1.54929	0.998324	0.997939	2.13085E-06	0.997666	3.26708E-06	0.99846	**1.85134E-08**
	2.54833	0.779978	0.777488	0.00107996	0.775439	0.00114744	0.78457	**2.10818E-05**
	2.64388	0.715348	0.712668	0.00128987	0.71105	0.00133756	0.720327	**2.47877E-05**
	2.93169	0.483461	0.480562	0.00164692	0.481004	0.00166112	0.488376	**2.41592E-05**
	2.99934	0.426718	0.423951	0.00163463	0.424895	0.00165759	0.431354	**2.15007E-05**
	3.00753	0.419931	0.417186	0.00163003	0.418188	0.00165444	0.424529	**2.11398E-05**
	3.07172	0.367731	0.365205	0.00157032	0.366628	0.00160806	0.371989	**1.81292E-05**
	3.09464	0.349621	0.34719	0.00153899	0.348749	0.00158203	0.353745	**0.000017008**
	3.50502	0.105346	0.10523	0.00053223	0.107424	0.000605062	0.106925	**2.49301E-06**
	3.74622	0.0392629	0.0398143	0.000145722	0.0412719	0.000178401	0.039907	**4.148E-07**
IMSE			0.001107		0.001143		**1.51E-05**	
Rank of method			2		3		**1**	
n	ti	$\boldsymbol{R}.Real$	$\hat{R}.Mle$	Mse	$\hat{R}.Wls$	Mse	$\hat{R}.Shr$	**Mse**

200	1.54929	0.998324	0.998282	9.52429E-07	0.998232	1.03504E-06	0.998568	**5.9691E-08**
	2.54833	0.779978	0.78201	0.000497191	0.781497	0.000491843	0.785339	**2.87373E-05**
	2.64388	0.715348	0.717072	0.000547121	0.716648	0.000542878	0.720626	**2.78594E-05**
	2.93169	0.483461	0.483101	0.000535033	0.483175	0.00055888	0.486746	**1.07915E-05**
	2.99934	0.426718	0.425826	0.000510907	0.426032	0.000543288	0.429315	**6.74786E-06**
	3.00753	0.419931	0.418979	0.000507639	0.419201	0.000540966	0.422444	**6.31824E-06**
	3.07172	0.367731	0.36635	0.000479374	0.366686	0.000519079	0.369594	**3.46953E-06**
	3.09464	0.349621	0.348107	0.000468079	0.34848	0.00050953	0.351258	**2.6812E-06**
	3.50502	0.105346	0.103637	0.00018052	0.104218	0.000206116	0.104635	**5.05506E-07**
	3.74622	0.0392629	0.0384064	5.38831E-05	0.0387957	6.20119E-05	0.0385891	**4.54071E-07**
IMSE			0.000378		0.000398		**8.76E-06**	
Rank of method			2		3		**1**	
	Overall Rank		8_2		12_3		$\mathbf{4_1}$	
			Best Method		Shrinkage			

والجدول (5) الآتي يبين القيم التقديرية لمعلمات التوزيع المقترح (TLG-RR) ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرُّتب الجزئية والكلية لطرائق التقدير للأنموذج الاول وبحسب حجوم العينات المفترضة

جدول (5)

n	Estimate Parameter	MLE	WLS	SH
25	parameters α	1.52815	1.553046361	1.5297
	MSE	0.00269797_{2}	0.0087431_{4}	0.000881962_{1}
	parameters β	1.47572	1.491932483	1.47563
	MSE	0.00654099_{3}	0.00486775_{2}	0.000594007_{1}
	parameters θ	3.40782	3.059045005	3.40971
	MSE	1.63816_{3}	1.526710288_{2}	0.167862_{1}
	$\sum$ ***Ranks***	$8_{2.5}$	$8_{2.5}$	3_{1}
50	parameters α	1.52371	1.5251949	1.5244
	MSE	0.00189951_{2}	0.00203603_{3}	0.000595599_{1}
	parameters β	1.48384	1.49300555	1.48792
	MSE	0.00356776_{2}	0.00369721_{3}	0.000146007_{1}
	parameters θ	3.212	3.066392605	3.12174
	MSE	0.648422_{3}	0.600344032_{2}	0.0148206_{1}
	$\sum$ ***Ranks***	7_{2}	8_{3}	3_{1}
100	parameters α	1.51787	1.517326046	1.51762
	MSE	0.000895929_{2}	0.000979998_{3}	0.000310354_{1}
	parameters β	1.48998	1.495147854	1.4916
	MSE	0.00176575_{2}	0.00190307_{3}	$7.06153E{-}05_{1}$
	parameters θ	3.04823	2.992198386	3.03857
	MSE	0.220921_{2}	0.2536877_{3}	0.00148731_{1}
	$\sum$ ***Ranks***	6_{2}	9_{3}	3_{1}
200	parameters α	1.50864	1.506664085	1.50763
	MSE	0.000441169_{4}	0.000436544_{3}	$5.82772E{-}05_{1}$
	parameters β	1.49122	1.493389341	1.49221
	MSE	0.000832914_{2}	0.000853198_{3}	$6.07252E{-}05_{1}$
	parameters θ	3.09445	3.080032332	3.08848
	MSE	0.135845_{2}	0.140569298_{3}	0.00782879_{1}
	$\sum$ ***Ranks***	8_{2}	9_{3}	3_{1}
	$\sum\sum$ ***Ranks***	**29_{2}**	**34_{3}**	**12_{1}**
Best Method			Shrinkage	

14-الاستنتاجات

1- أوضح الجانب التجريبي عن طريق المعيارين الإحصائيين متوسط مربعات الخطأ (MSE) بالنسبة لتقدير المعلمات، ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) بالنسبة لمقدرات دالة المعولية مايأتي:

- ان طريقة التقليص المختلطة (shrinkage) حصلت على المرتبة الاولى في الافضلية عند حساب قيم مقدرات المعلمات ودالة المعولية عند جميع احجام العينات المختلفة (25,50,100,200).
- ان طريقة الامكان الاعظم (MIE) وطريقة (WLS) جاءتا في المرتبة الثانية والثالثة في الأفضلية عند احجام العينات العينات المختلفة (25,50,100,200).

2- نلحظ في جميع طرائق التقدير المستعملة في عمليات التقدير، انه كلما ازداد حجم العينة اقتربت قيم المقدرات لدالة المعولية من القيم الحقيقية لدالة المعولية المفترضة، وهذا يتطابق مع النظرية الإحصائية، اي انه كلما ازداد حجم العينة قلت قيمة المعيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) لكل تجربة من المحاكاة.

3- نلحظ ان قيم دالة المعولية متناقصة مع الزمن أي تناسبها عكسياً مع الزمن ، وقيم دالة الكثافة التجميعية تقع بين الصفر والواحد الصحيح، وهي في تزايد وتتناسب طرديا مع الزمن.

15- التوصيات

1- على الباحثين تطبيق التوزيع الاحتمالي المقترح (TLG-RR)، في جوانب ومجالات علمية وعملية مثل الجانب الطبي والجانب الهندسي والجانب الصناعي، وكذلك تطبيقه في الدراسات والبحوث العلمية التي تهتم بتقدير دوال البقاء على قيد الحياة.

2- على الباحثين استعمال طريقة التقليص المختلطة (shrinkage)، لتقدير المعلمات ودالة المعولية كونها الطريقة الفضلى في عملية التقدير لأي حجم عينة.

المصادر:

المصادر العربية:

1- خميس، احمد جاسم، (2016) "**مقدر بيز لدالة المعولية الضبابية لتوزيع رايأتي الاسي، باستعمال المحاكاة**" مجلة كلية التربية، الإصدار: (5)، الصفحة: (289-318).

2- مسلم باسم شليبة، كاظم اموري هادي، "القياس الاقتصادي المتقدم، النظرية والتطبيق" العراق، جامعة بغداد، مطبعة الطيف،2002، ص:107

3- نصر الله، مهدي وهاب" بناء توزيع احتمالي اسي–باريتو الموزون مع تطبيق عملي" أطروحة دكتوراه في علم الإحصاء، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة بغداد،2015.

4- نعيم، حيدر رسول، "**تقدير دالة معوّليّة توزيع (Topp-Leone) مع تطبيق عملي**"رسالة ماجستير، جامعة كربلاء، كلية الإدارة والاقتصاد،2021.

5- هرمز، امير حنا، "الإحصاء الرياضي" دار الكتب للطباعة والنشر،.1990 ص:137-134.

المصادر الإنكليزية:

6- Abushal, T. A., Hassan, A. S., El-Saeed, A. R., & Nassr, S. G. (2021) . ***Power inverted Topp–Leone distribution in acceptance sampling plans***. *Comput. Mater. Contin*, *67*, 991-1011.

7- Aldahlan, M. A. (2019). ***Classical and Bayesian Estimation for Topp leone Inverse Rayleigh Distribution***. *Pure Mathematical Sciences*, *8*(1), 1-10.

8- Ateeq, K., Qasim, T. B., & Alvi, A. R. (2019). ***An extension of Rayleigh distribution and applications***. *Cogent Mathematics & Statistics*, *6*(1), 1622191.

9- *Hassan, A. S., Elgarhy, M., & Ragab, R. (2020).* ***Statistical properties and estimation of inverted Topp-Leone distribution.*** *J. Stat. Appl. Probab, 9(2), 319*

10- Hendry, D. F., & Nielsen, B. (2007). ***Econometric modeling: a likelihood approach***. Princeton University Press.

11- Lehmann, E. L., & Casella, G. (2006). ***Theory of point estimation.*** Springer Science & Business Media.

12- Rezaei, S., Sadr, B. B., Alizadeh, M., & Nadarajah, S. (2017). ***Topp–Leone generated family of distributions: Properties and applications***. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, *46*(6), 2893-2909.

13- Rossi, R. J. (2018). ***Mathematical statistics: an introduction to likelihood based inference***. John Wiley & Sons.

14- Sangsanit, Y., & Bodhisuwan, W. (2016). ***The Topp-Leone generator of distributions: properties and inferences.*** *Songklanakarin Journal of Science & Technology*, *38*(5).

15- Swain, J. J., Venkatraman, S., & Wilson, J. R. (1988). ***Least-squares estimation of distribution functions in Johnson's translation system***. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, *29*(4), 271-297.

16- Thompson, J. R. (1968). ***Some shrinkage techniques for estimating the mean***. *Journal of the American Statistical Association*, *63*(321), 113-122.

17- Topp, C. W., & Leone, F. C. (1955). ***A family of J-shaped frequency functions***. *Journal of the American Statistical Association*, *50*(269), 209-219.

18- Yousof, H. M., Jahanshahi, S. M. A., Ramires, T. G., Aryal, G. R., & Hamedani, G. G. (2018). ***A NEW DISTRIBUTION FOR EXTREME VALUES: REGRESSION MODEL***, CHARACTERIZATIONS AND APPLICATIONS. *Journal of Data Science*, *16*(4).

المواقع الالكترونية

19- http:// www.nid-moi.gov.iq.com.

20- https://sites.google.com/site/learningandteachingstrategies1/lllllll/pp/almhakate-wtmthyl-aladwar.com.